Universitas Gadjah Mada
Fakultas Teknik
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan
Program Studi Teknik Sipil Program Sarjana

Solusi Numerik Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial Parsial
Metode Beda Hingga

Persamaan Diferensial Parsial - PDE

- Buku Acuan
  - Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
    - Part 7, Chapters 23-24, pp. 707-749
    - Kuliah 1-3 (metode beda hingga)

https://istiarto.staff.ugm.ac.id

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

- Suatu fungsi *u* yang bergantung pada *x* dan *y* → *u*(*x*,*y*)
  - Diferensial *u* terhadap x di sembarang titik (*x*,*y*)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}$$

  - Diferensial *u* terhadap *y* di sembarang titik (*x*,*y*)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(\mathrm{x}, \mathrm{y})}{\Delta y}$$

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

Contoh arti fisik

u elevasi tanah pada peta situasi.

u ditunjukkan oleh garis-garis (kontur) elevasi tanah.

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

(2) $$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$$

(3) $$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3 + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x$$

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu\frac{\partial u}{\partial y} = x$$

- Tingkat (*order*) PDE adalah tingkat tertinggi suku derivatif
- PDE merupakan fungsi linear apabila
  - fungsi tsb linear pada *u* dan derivatif *u*, dan
  - koefisien persamaan tsb hanya bergantung pada variabel bebas (*x* atau *y*) atau konstanta

PDE	Order	Linear
(1)	2	ya
(2)	3	ya
(3)	3	tidak
(4)	2	tidak

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - D = 0$$

A, *B*, *C* : fungsi *x* dan *y*

D : fungsi *x*, *y*, *u*, ∂*u*/∂*x*, dan ∂*u*/∂*y*

$B^2 - 4AC$	kategori
< 0	eliptik
= 0	parabolik
> 0	hiperbolik

- PDE yang dibahas dalam makul Solusi Numerik Persamaan Diferensial hanya PDE linear bertingkat dua
- PDE linear bertingkat dua dan fungsi dua variabel bebas (*x*,*y*) dapat dikelompokkan menjadi
  - persamaan eliptik
  - persamaan parabolik
  - persamaan hiperbolik

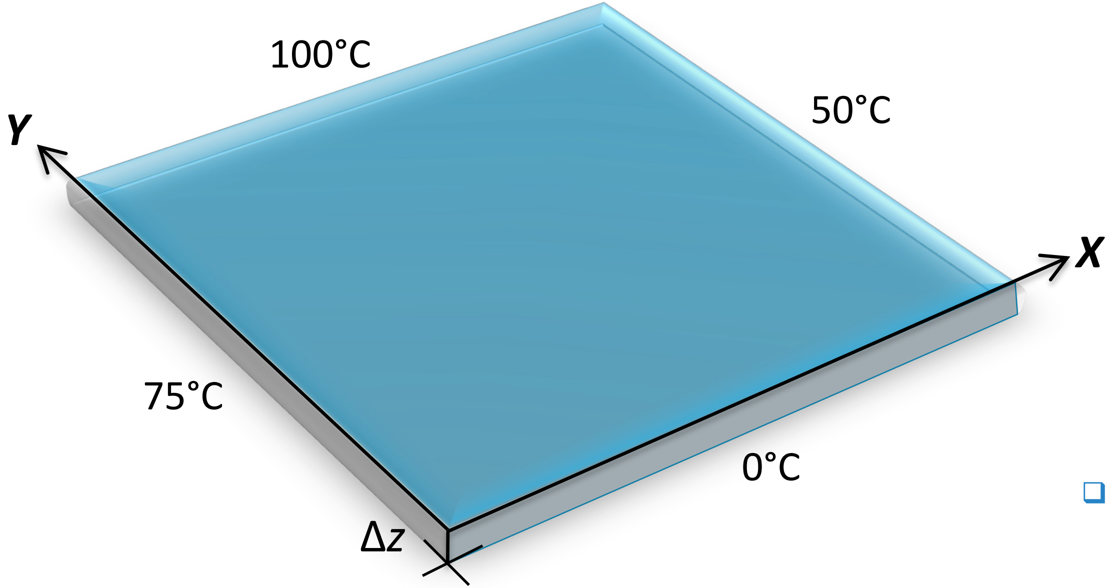
Persamaan Diferensial Parsial – PDE

$B^2 - 4AC$	Kategori	Nama	Persamaan
< 0	Eliptik	Persamaan Laplace (permanen, 2D spasial)	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
= 0	Parabolik	Persamaan konduksi termal (tak-permanen, 1D spasial)	$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$
> 0	Hiperbolik	Persamaan gelombang (tak-permanen, 1D spasial)	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

PDE Eliptik (Persamaan Laplace)

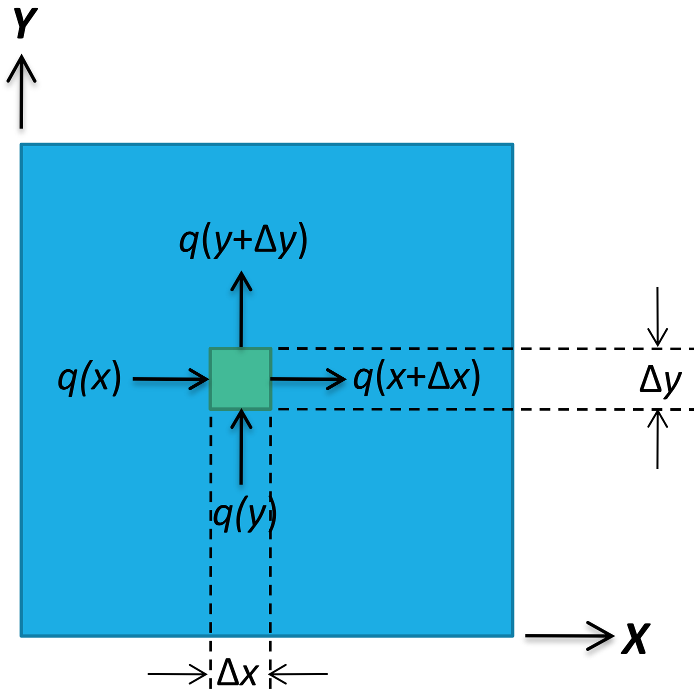
Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

Persamaan Laplace



- Sebuah plat logam persegi tipis berukuran 4×4 cm^2
  - kedua permukaan dilapisi isolator termal
  - sisi-sisi plat diberi panas, temperatur konstan
  - transfer termal hanya dimungkinkan ke arah *x* dan *y*
- Ingin diketahui temperatur plat pada saat transfer permanen telah tercapai (*steady-state condition*)

Persamaan Laplace



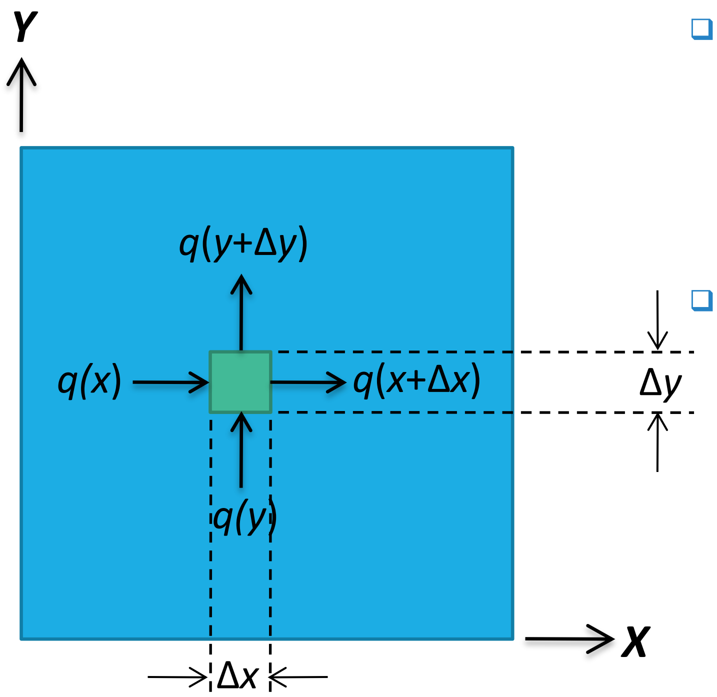
- Ketika *steady-state condition* telah tercapai, maka aliran kedalam sebuah elemen (lihat gambar di samping) selama periode Δ*t* haruslah sama dengan aliran yang keluar dari elemen itu.

$$q(x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y)\Delta x\Delta z\Delta t =$$

$$q(x + \Delta x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y + \Delta y)\Delta x\Delta z\Delta t$$

q(*x*) dan *q*(*y*) berturut-turut adalah fluks termal arah *x* dan arah *y*, dalam satuan kal/cm^2/s.

Persamaan Laplace



- Jika semua suku dalam persamaan tsb dibagi dengan Δ*z* Δ*t*, maka

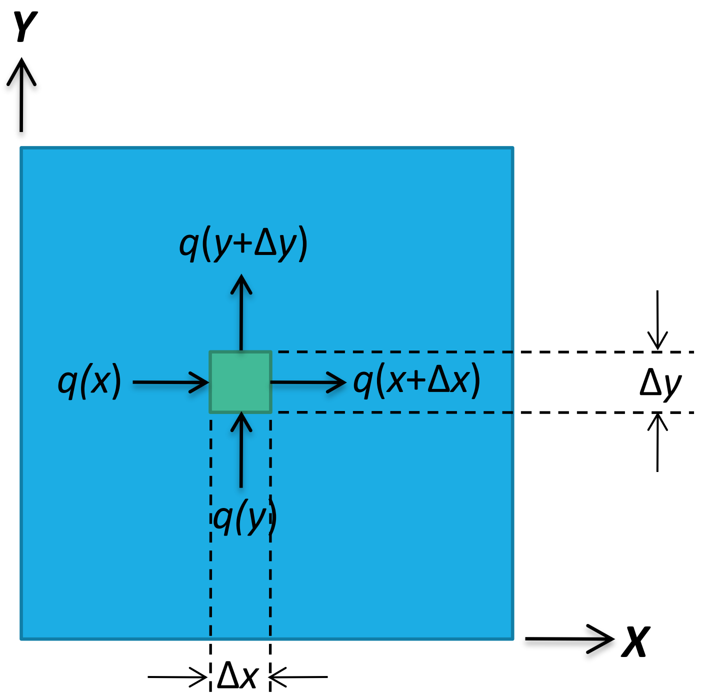
$$q(x)\Delta y + q(y)\Delta x = q(x+\Delta x)\Delta y + q(y+\Delta y)\Delta x$$

- Pengelompokan suku dan perkalian dengan Δ*x*/Δ*x* atau Δ*y*/Δ*y* menghasilkan

$$\frac{q(x)-q(x+\Delta x)}{\Delta x}\Delta x\Delta y + \cdots$$

$$\frac{q(y)-q(y+\Delta y)}{\Delta y}\Delta y\Delta x = 0$$

Persamaan Laplace



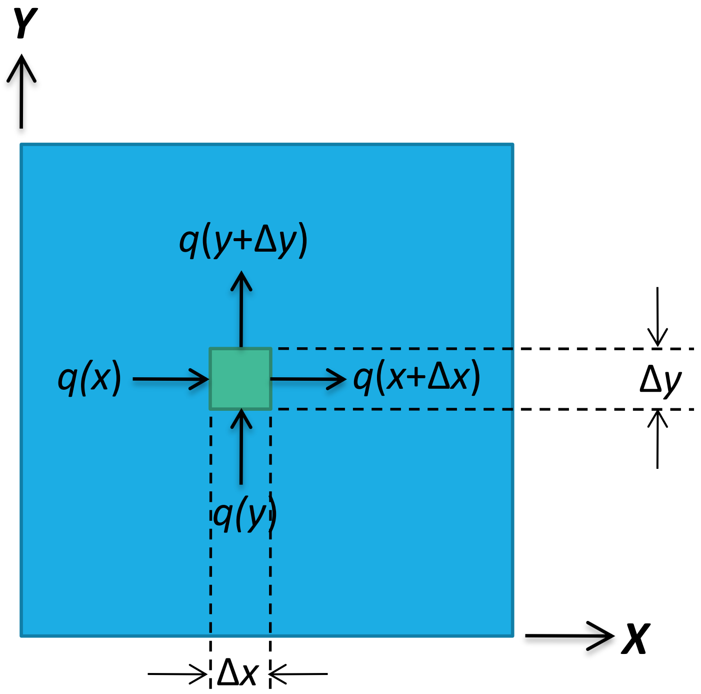
- Pembagian dengan $\Delta x\ \Delta y$ menghasilkan

$$\frac{q(x)-q(x+\Delta x)}{\Delta x}+\frac{q(y)-q(y+\Delta y)}{\Delta y}=0$$

- Mengambil nilai limit persamaan di atas dan memperhatikan definisi diferensial parsial, maka diperoleh

$$-\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}=0 \quad \text{(persamaan konservasi energi)}$$

Persamaan Laplace



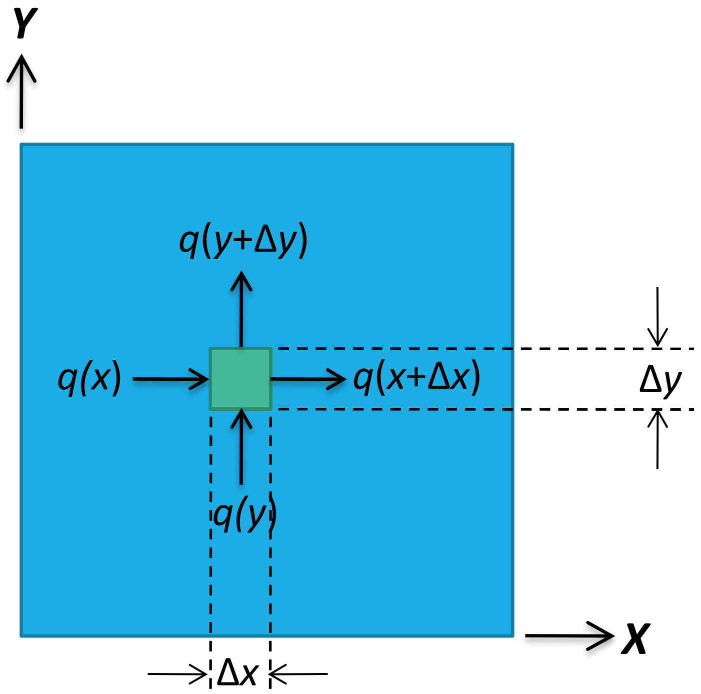
$$-\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}=0$$

- Penyelesaian PDE tsb membutuhkan **syarat batas** *(boundary condition)* fluks termal *q*. Padahal, syarat batas yang diketahui adalah temperatur *T*.
- Oleh karena itu, PDE di atas diubah menjadi PDE dalam *T* dengan menerapkan Hukum Fourier untuk konduksi termal.

$$\left.\begin{aligned} q_i &= -k\rho C\frac{\partial T}{\partial i} \\ q_i &= -k'\frac{\partial T}{\partial i}\end{aligned}\right\}$$

(Fourier's law of heat conduction)

Persamaan Laplace

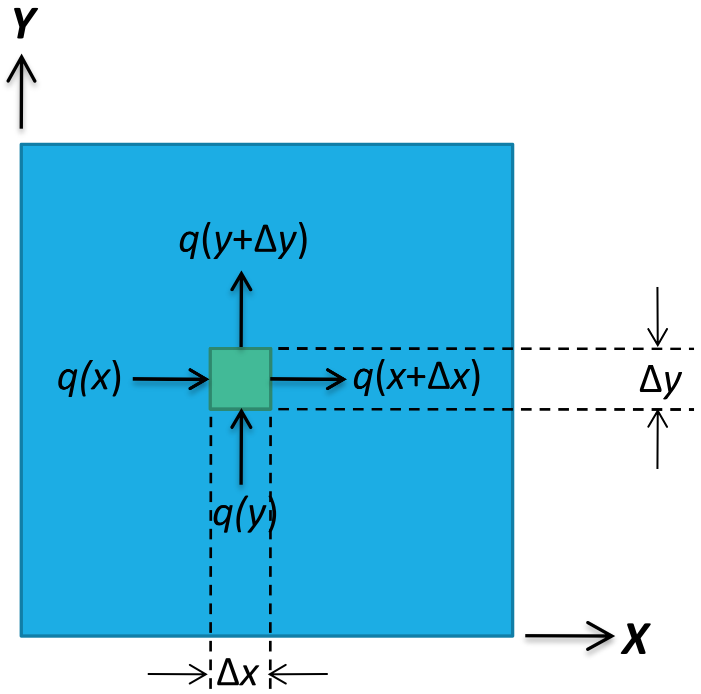


$$q_i = -k\rho C\frac{\partial T}{\partial i} = -k'\frac{\partial T}{\partial i}$$

q_i	fluks termal arah *i* (kal/cm²/s)
k	koefisien difusi termal (cm²/s)
ρ	rapat massa medium (g/cm³)
C	kapasitas termal medium (kal/g/°C)
T	temperatur (°C)
k'	konduktivitas termal (kal/s/cm/°C)

- Persamaan di atas menunjukkan bahwa fluks termal arah tegak lurus sumbu *i* sebanding dengan gradien/*slope* temperatur arah *i*.

Persamaan Laplace



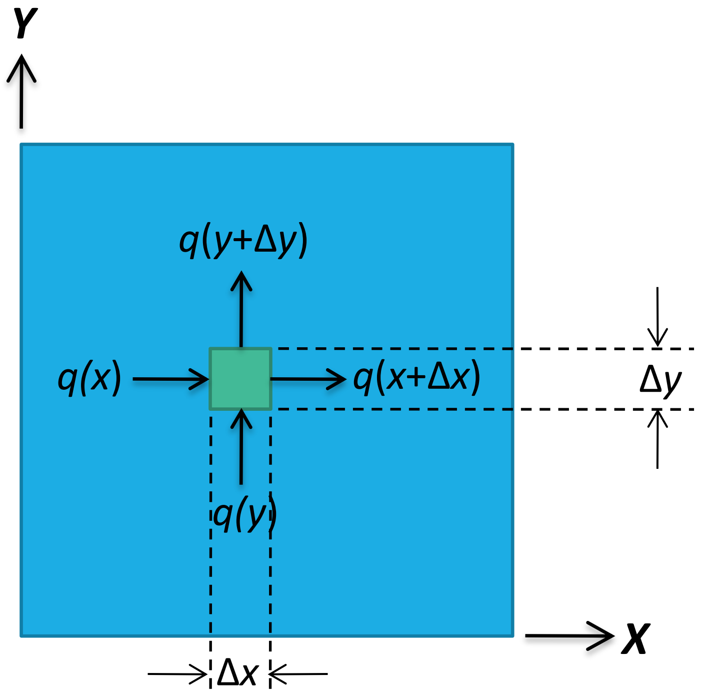
- Dengan memakai *Fick's Law*, maka persamaan konservasi energi dapat dituliskan sbb.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(Persamaan Laplace)}$$

- Jika ada *source* atau *sink*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad \text{(Persamaan Poisson)}$$

Persamaan Laplace



- Persamaan tsb sama dengan persamaan aliran melalui medium porus (Hukum Darcy).

$$q_i = -K\frac{\partial H}{\partial i}$$

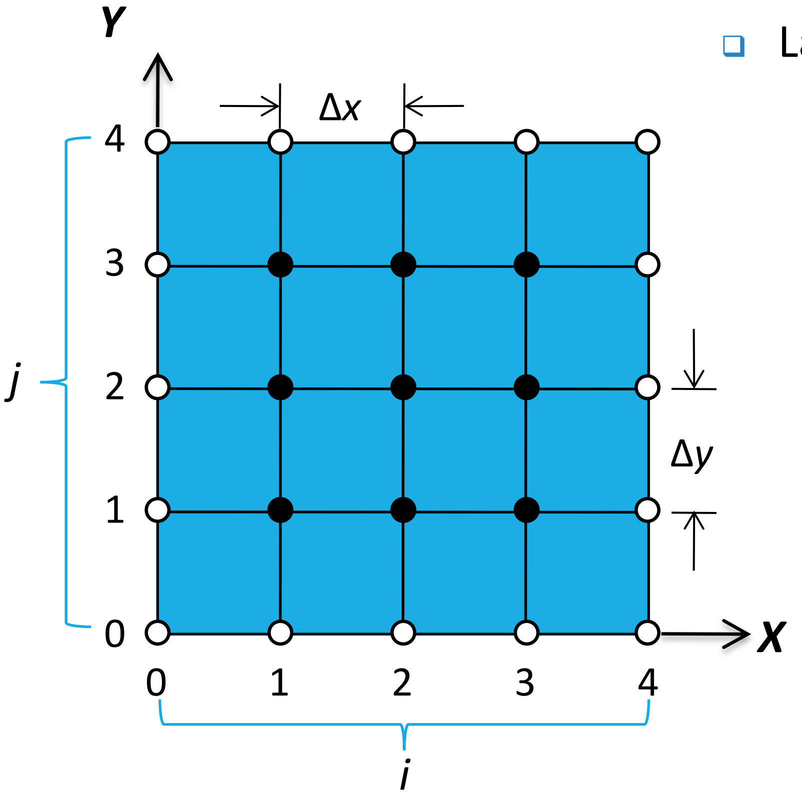
q_i : debit aliran arah i ($m^3/m/s$)
K : konduktivitas hidraulik (m^2/s)
H : tinggi energi hidraulik (m)
i : panjang lintasan, panjang aliran (m)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=0$$

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- Penyelesaian persamaan Laplace, dan berbagai PDE di bidang enjiniring, hampir tidak pernah dilakukan secara analitis, kecuali untuk kasus-kasus yang sederhana.
- Penyelesaian hampir selalu dilakukan secara numeris.
- Teknik penyelesaian PDE secara numeris
  - Metode beda hingga (*finite difference approximation*, FDA)
  - Metode volume hingga (*finite volume method*, FVM)
  - Metode elemen hingga (*finite element method*, FEM)

Finite Difference Approach – FDA



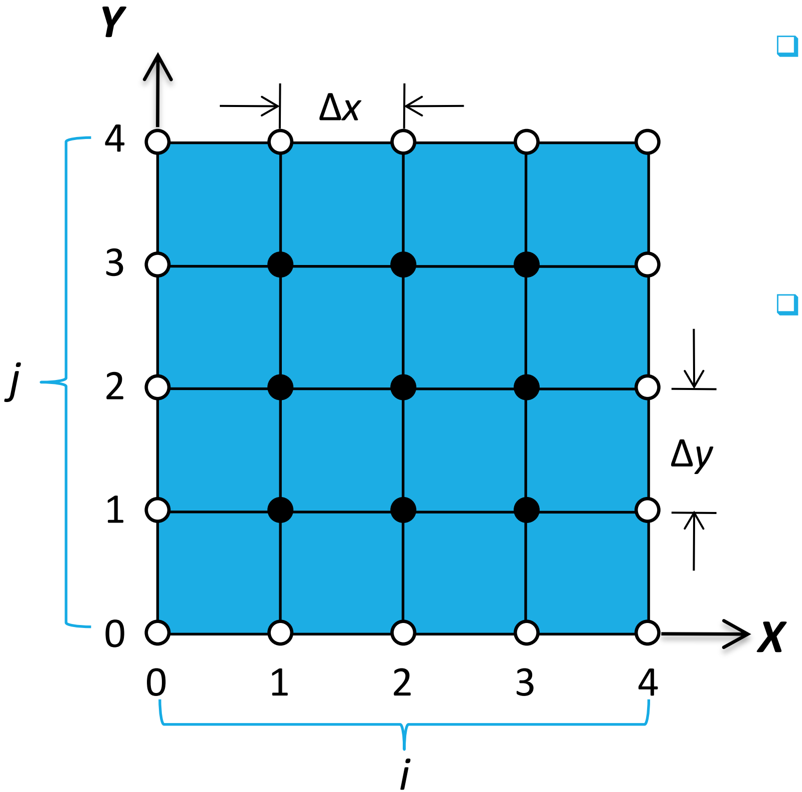
- Langkah pertama dalam FDA
  - Domain fisik plat persegi dibagi menjadi sejumlah pias atau grid titik-titik diskret.
  - PDE Laplace diubah menjadi persamaan beda hingga di setiap titik hitung (*i*,*j*).
  - Di titik hitung interior (simbol bulat hitam):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

- diferensi tengah (*central difference*)
- error = $O[(\Delta x)^2]$ &
- error = $O[(\Delta y)^2]$

Finite Difference Approach – FDA



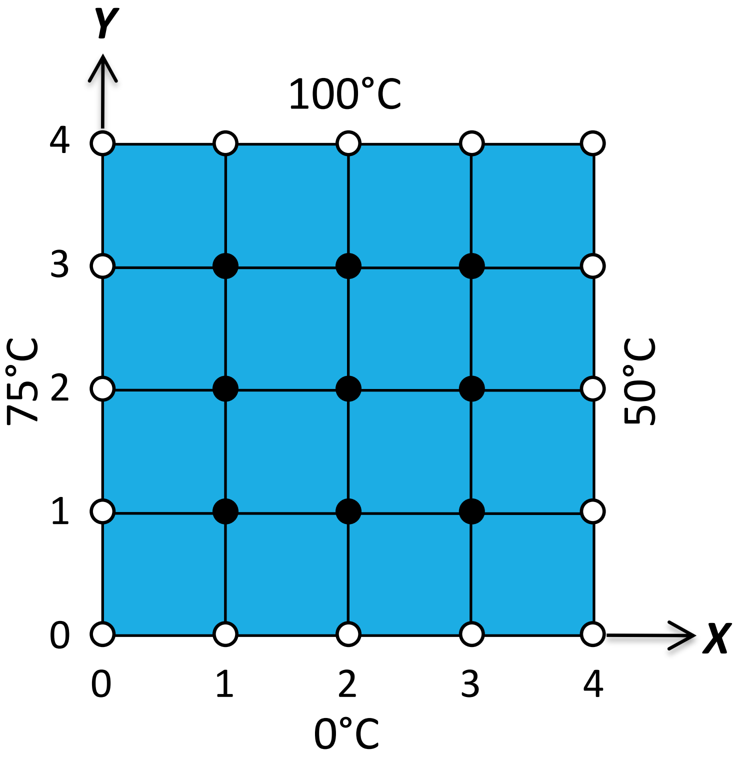
- Persamaan Laplace dalam bentuk beda hingga

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

- Jika ukuran grid seragam, $\Delta x = \Delta y$ (= 1 cm), maka

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

Finite Difference Approach – FDA



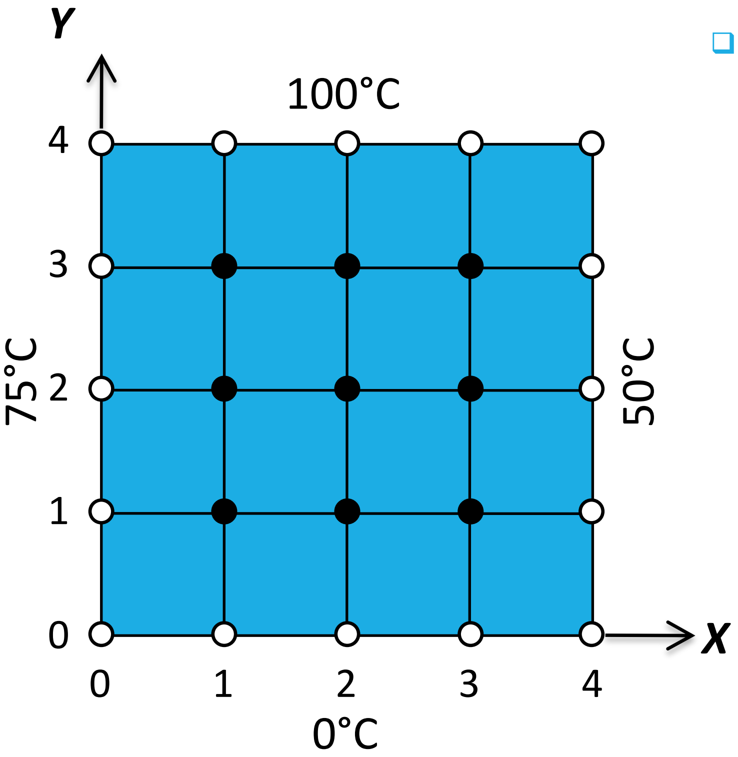
- Di titik-titik yang berada di batas domain (simbol bulat putih), berlaku syarat batas (*boundary conditions*) → temperatur diketahui/ditetapkan.
- BC semacam itu dikenal dengan nama ***Dirichlet boundary condition*** (syarat batas Dirichlet)
- Di titik (1,1)

$$T_{2,1} + T_{0,1} + T_{1,2} + T_{1,0} - 4T_{1,1} = 0$$

$$-4T_{1,1} + T_{1,2} + T_{2,1} = -75 - 0$$

- Di 8 titik interior yang lain pun dapat dituliskan persamaan beda hingga diskret semacam di atas.

Finite Difference Approach – FDA



- Dari 9 titik interior diperoleh sistem persamaan aljabar linear yang terdiri dari 9 persamaan dengan 9 *unknowns*.

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- 9 persamaan yang memiliki 9 *unknowns*

	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(1,3)	(2,3)	(3,3)		
(1)	$-4T_{1,1}$	$+T_{2,1}$	$+0$	$+T_{1,2}$						$=$	-75
(2)	$T_{1,1}$	$-4T_{2,1}$	$+T_{3,1}$	$+0$	$+T_{2,2}$					$=$	0
(3)	$+0$	$+T_{2,1}$	$-4T_{3,1}$	$+0$	$+0$	$+T_{3,2}$				$=$	-50
(4)	$T_{1,1}$	$+0$	$+0$	$-4T_{1,2}$	$+T_{2,2}$	$+0$	$+T_{1,3}$			$=$	-75
(5)		$+T_{2,1}$	$+0$	$+T_{1,2}$	$-4T_{2,2}$	$+T_{3,2}$	$+0$	$+T_{2,3}$		$=$	0
(6)			$+T_{3,1}$	$+0$	$+0$	$-4T_{3,2}$	$+0$	$+T_{2,3}$	$+T_{3,3}$	$=$	-50
(7)				$+T_{1,2}$	$+0$	$+0$	$-4T_{1,3}$	$+T_{2,3}$	$+0$	$=$	-175
(8)					$+T_{2,2}$	$+0$	$+T_{1,3}$	$-4T_{2,3}$	$+T_{3,3}$	$=$	-100
(9)						$+T_{3,2}$	$+0$	$+T_{2,3}$	$-4T_{3,3}$	$=$	-150

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

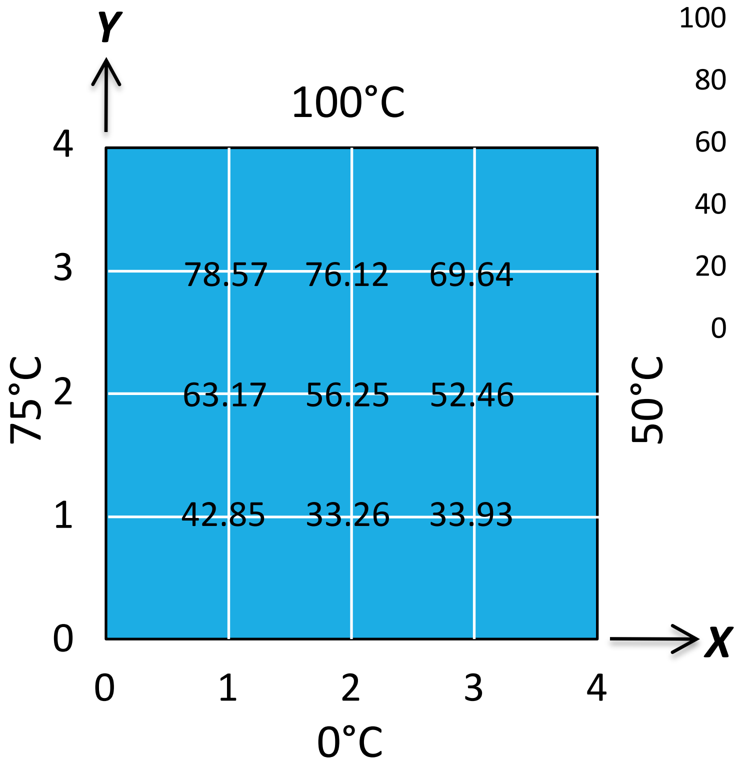
- 9 persamaan yang memiliki 9 *unknowns*

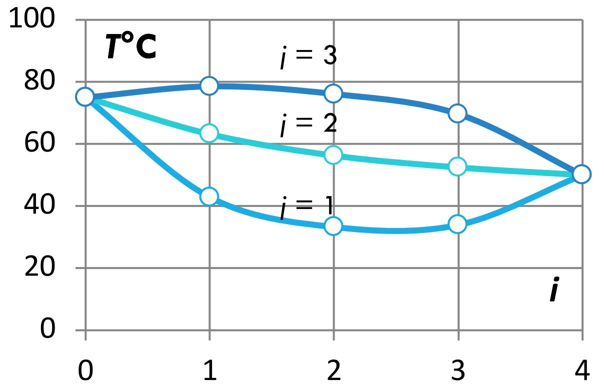
$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} T_{1,1} & T_{2,1} & T_{3,1} & T_{1,2} & T_{2,2} & T_{3,2} & T_{1,3} & T_{2,3} & T_{3,3} \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} -75 \\ 0 \\ -50 \\ -75 \\ 0 \\ -50 \\ -175 \\ -100 \\ -150 \end{Bmatrix}$$

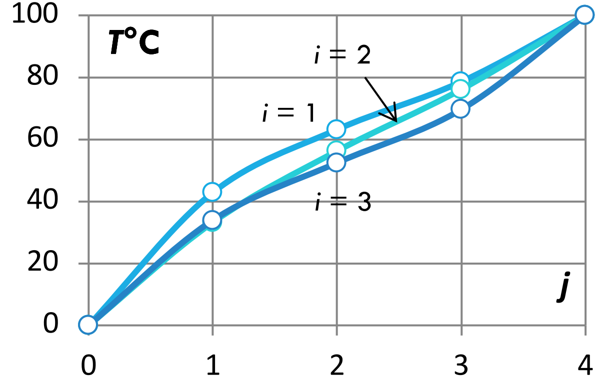
Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- Sistem persamaan aljabar yang dihasilkan dari penerapan persamaan beda hingga (*finite difference*) di semua titik interior
  - diselesaikan dengan salah satu metode yang telah dibahas dalam kuliah Metode Numerik
  - untuk 9 persamaan, penyelesaian masih dapat dilakukan dengan mudah memakai cara tabulasi *spreadsheet*
  - untuk jumlah persamaan yang banyak, seperti yang biasa ditemui dalam permasalahan *engineering*, perlu bantuan program komputer
    - MatLab (program aplikasi berbayar)
    - SciLab (mirip MatLab, program aplikasi *open source*, platform Windows, MacOS, Linux)
    - **Octave** (mirip MatLab, program aplikasi *open source*, platform Windows, MacOS, Linux)
    - **Python**
    - *Numerical Recipes*
    - Etc. (dapat dicari di internet)

Perkalian Matriks: $\{T\} = [A]^{-1}\,\{R\}$







Iterasi: Jacobi, Gauss-Seidel, SOR

- Metode iteratif: *Gauss-Seidel iteration method*

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \quad \text{atau} \quad T_{i,j} = \frac{T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j+1}}{4}$$

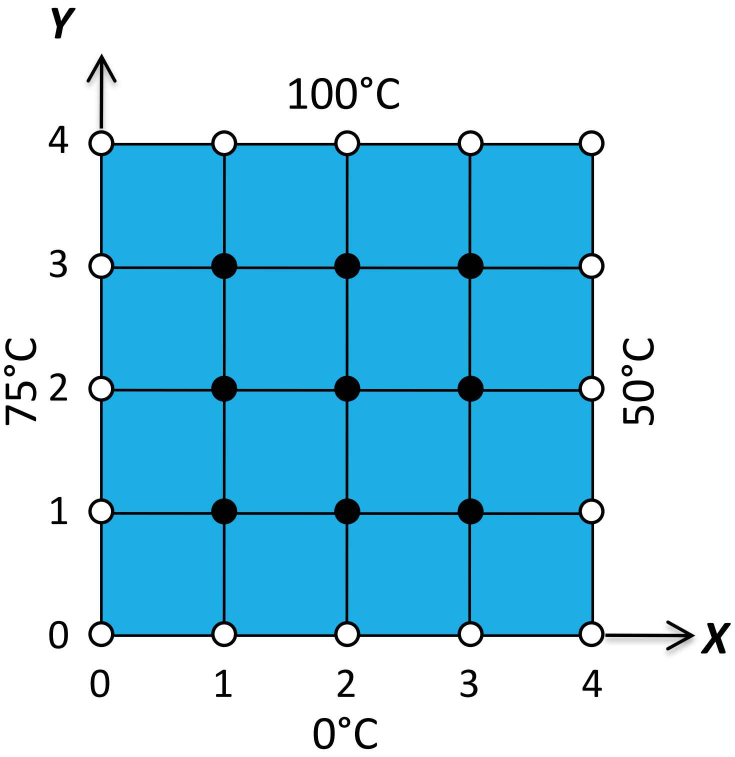
  - Dipakai SOR (*Successive Over Relaxation*) method untuk mempercepat konvergensi

$$T_{i,j}^{n+1} = \lambda T_{i,j}^{n+1} + (1-\lambda) T_{i,j}^{n} \qquad 1 < \lambda < 2$$

  - Kriteria konvergensi

$$\max\left|\varepsilon_{i,j}\right| = \max\left|\frac{T_{i,j}^{(n+1)} - T_{i,j}^{n}}{T_{i,j}^{(n+1)}}\right| < 1\%$$

hitungan dilakukan dengan bantuan tabulasi *spreadsheet*



$$T_{1,1}^{n+1} = \frac{75 + T_{2,1}^{n} + 0 + T_{1,2}^{n}}{4}$$

$$T_{2,1}^{n+1} = \frac{\lambda T_{1,1}^{n+1} + (1-\lambda)T_{1,1}^{n} + T_{3,1}^{n} + 0 + T_{2,2}^{n}}{4}$$

$$T_{3,1}^{n+1} = \frac{\lambda T_{2,1}^{n+1} + (1-\lambda)T_{2,1}^{n} + 50 + 0 + T_{3,2}^{n}}{4}$$

$$T_{1,2}^{n+1} = \frac{75 + T_{2,2}^{n} + \lambda T_{1,1}^{n+1} + (1-\lambda)T_{1,1}^{n} + T_{1,3}^{n}}{4}$$

$$T_{2,2}^{n+1} = \frac{\lambda T_{1,2}^{n+1} + (1-\lambda)T_{1,2}^{n} + T_{3,2}^{n} + \lambda T_{2,1}^{n+1} + (1-\lambda)T_{2,1}^{n} + T_{2,3}^{n}}{4}$$

$$T_{3,2}^{n+1} = \frac{\lambda T_{2,2}^{n+1} + (1-\lambda)T_{2,2}^{n} + 50 + \lambda T_{3,1}^{n+1} + (1-\lambda)T_{3,1}^{n} + T_{3,3}^{n}}{4}$$

$$T_{1,3}^{n+1} = \frac{75 + T_{2,3}^{n} + \lambda T_{1,2}^{n+1} + (1-\lambda)T_{1,2}^{n} + 100}{4}$$

$$T_{2,3}^{n+1} = \frac{\lambda T_{1,3}^{n+1} + (1-\lambda)T_{1,3}^{n} + T_{3,3}^{n} + \lambda T_{2,2}^{n+1} + (1-\lambda)T_{2,2}^{n} + 100}{4}$$

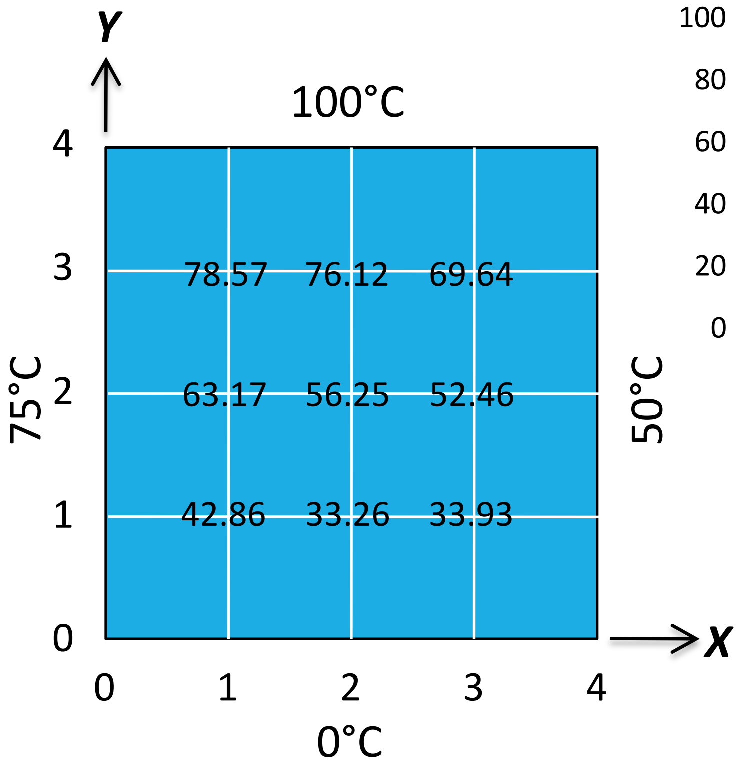
$$T_{3,3}^{n+1} = \frac{\lambda T_{2,3}^{n+1} + (1-\lambda)T_{2,3}^{n} + 50 + \lambda T_{3,2}^{n+1} + (1-\lambda)T_{3,2}^{n} + 100}{4}$$

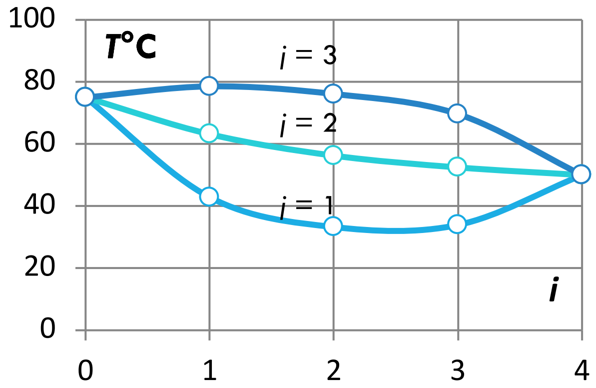
Iterasi SOR: $\lambda = 1.5$

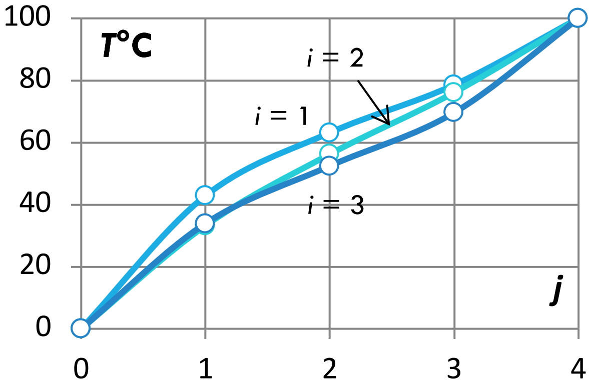
iterasi, n	$T_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{3,1}$	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	$T_{1,3}$	$T_{2,3}$	$T_{3,3}$	ΔT_{max}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	---
1	18.7500	7.0313	15.1367	25.7813	12.3047	22.7905	53.4180	45.0317	62.9333	62.9333
2	26.9531	14.6240	22.8027	42.9443	34.4421	46.2700	67.8894	62.5908	69.8450	23.4795
3	33.1421	23.3704	31.0034	53.3920	48.8050	52.7338	74.0517	70.3550	70.0507	14.3629
4	37.9406	30.0371	34.0261	59.5491	54.7717	53.3358	76.9957	74.3309	69.9889	6.6667
5	41.1466	32.8868	34.4119	62.3792	56.4432	52.9681	78.2813	75.9212	69.8752	3.2060
6	42.5665	33.5329	34.2060	63.2502	56.6077	52.6671	78.6517	76.2888	69.7473	1.4200
7	42.9458	33.4873	34.0329	63.3487	56.4546	52.5179	78.6717	76.2592	69.6719	0.3793
8	42.9590	33.3633	33.9548	63.2730	56.3284	52.4632	78.6236	76.1815	69.6446	0.1262
9	42.9091	33.2918	33.9298	63.2090	56.2695	52.4505	78.5896	76.1364	69.6395	0.0715
10	42.8752	33.2644	33.9253	63.1793	56.2505	52.4509	78.5752	76.1192	69.6404	0.0339

Iterasi konvergen: $n > 16$

Iterasi SOR: $\lambda = 1.5$



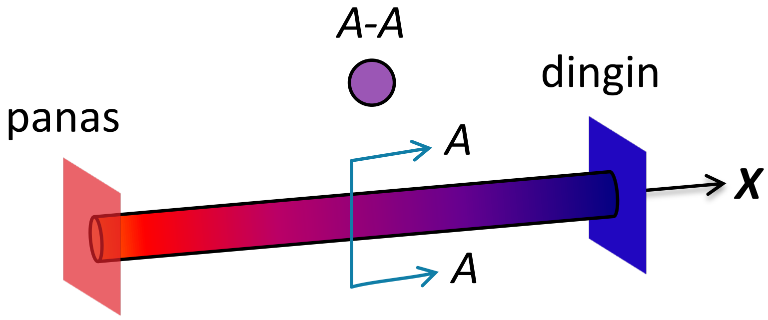




Penyelesaian PDE Parabolik

FDA Skema Eksplisit
FDA Skema Implisit
FDA Skema Crank-Nicolson

PDE Parabolik



Batang logam pipih-panjang dibungkus isolator termal, <u>kecuali</u> di pangkal dan di ujung batang yang diberi panas dengan temperatur yang berbeda, yaitu panas dan dingin.

- *Heat balance* di dalam batang

$$\underset{input}{q(x)A\Delta t} - \underset{output}{q(x+\Delta x)A\Delta t} = \underset{storage}{\Delta x A \varrho C \Delta T}$$

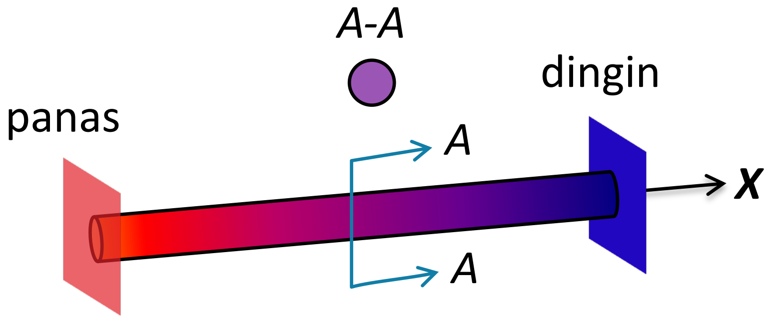
- persamaan tsb dibagi vol = $\Delta x A \Delta t$

$$\frac{q(x) - q(x+\Delta x)}{\Delta x} = \varrho C \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

- limit persamaan tersebut untuk Δx, $\Delta t \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \varrho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

PDE Parabolik



Batang logam pipih-panjang dibungkus isolator termal, kecuali di ujung dan di pangkal batang yang diberi panas dengan temperatur berbeda, yaitu panas dan dingin.

- Hukum Fourier untuk konduksi termal

$$q = -k\varrho C\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

- Persamaan *heat balance* menjadi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ Persamaan konduksi termal

- Persamaan di atas merupakan persamaan difusi
  - konduksi termal
  - transpor polutan
  - transpor sedimen suspensi

FDA: Skema Eksplisit dan Skema Implisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- Temperatur batang merupakan fungsi waktu dan ruang
  - terhadap waktu, *T* berupa suku derivatif pertama
  - terhadap ruang, *T* berupa suku derivatif kedua
- Langkah hitungan metode FDA
  - *T* pada waktu *t*+Δ*t* dihitung berdasarkan *T* pada waktu *t*
  - *T* pada waktu *t* sudah diketahui dari nilai/syarat awal (***initial condition***) atau dari hasil hitungan langkah sebelumnya
  - saat menghitung *T* di suatu titik pada suku derivatif ruang, *T* yang mana yang dipakai?
    - jika *T* pada waktu *t* → dinamai skema eksplisit
    - jika *T* pada waktu *t*+Δ*t* → dinamai skema implisit

https://istiarto.staff.ugm.ac.id

FDA: Skema Eksplisit dan Skema Implisit

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_{\text{di titik } i}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_i$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k\,\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Skema Eksplisit

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k\,\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

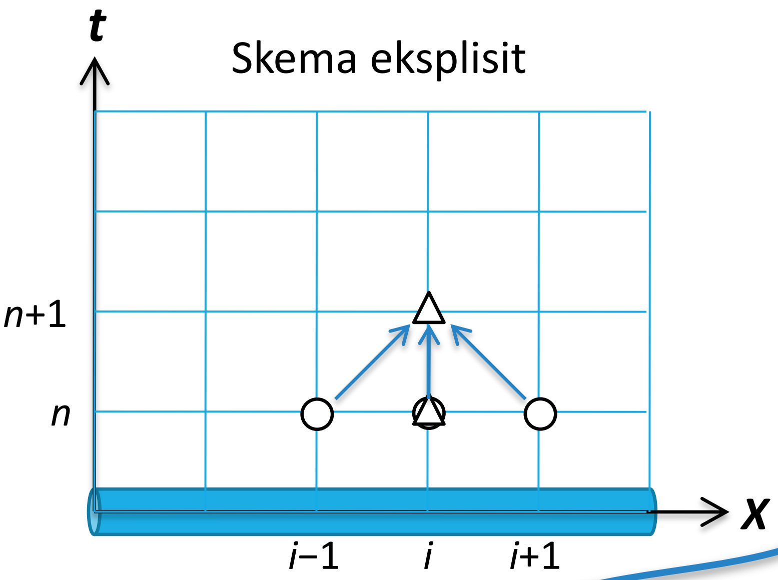
Skema Implisit

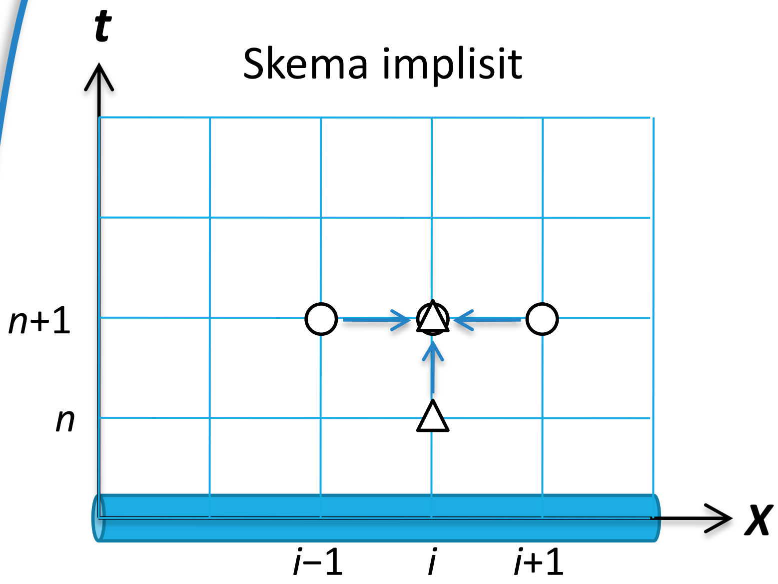
k konstan di sepanjang batang dan pada seluruh waktu

Δx seragam di sepanjang batang

FDA: Skema Eksplisit dan Skema Implisit

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)\left(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n\right)$$

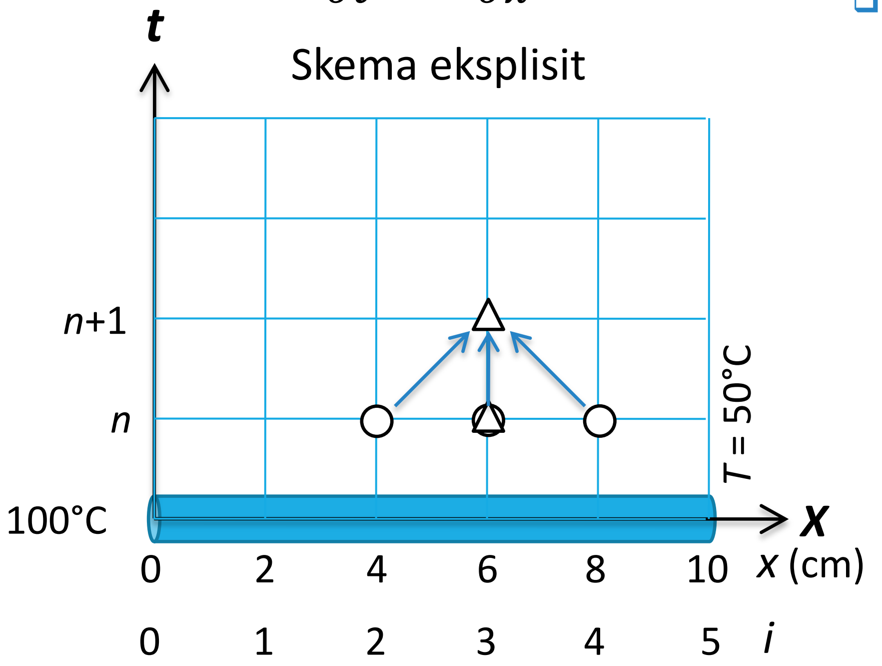




$$\left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n+1} + \left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

FDA: Skema Eksplisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



- Konduksi termal di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - panjang batang, *L* = 10 cm, Δ*x* = 2 cm
  - *time step*, Δ*t* = 0.1 s
  - koefisien difusi termal, *k* = 0.835 cm²/s
  - syarat batas: *T*(*x*=0,*t*)= 100°C dan *T*(*x*=10,*t*) = 50°C
  - nilai awal: *T*(*x*,*t*=0) = 0°C

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)\left(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n\right)$$

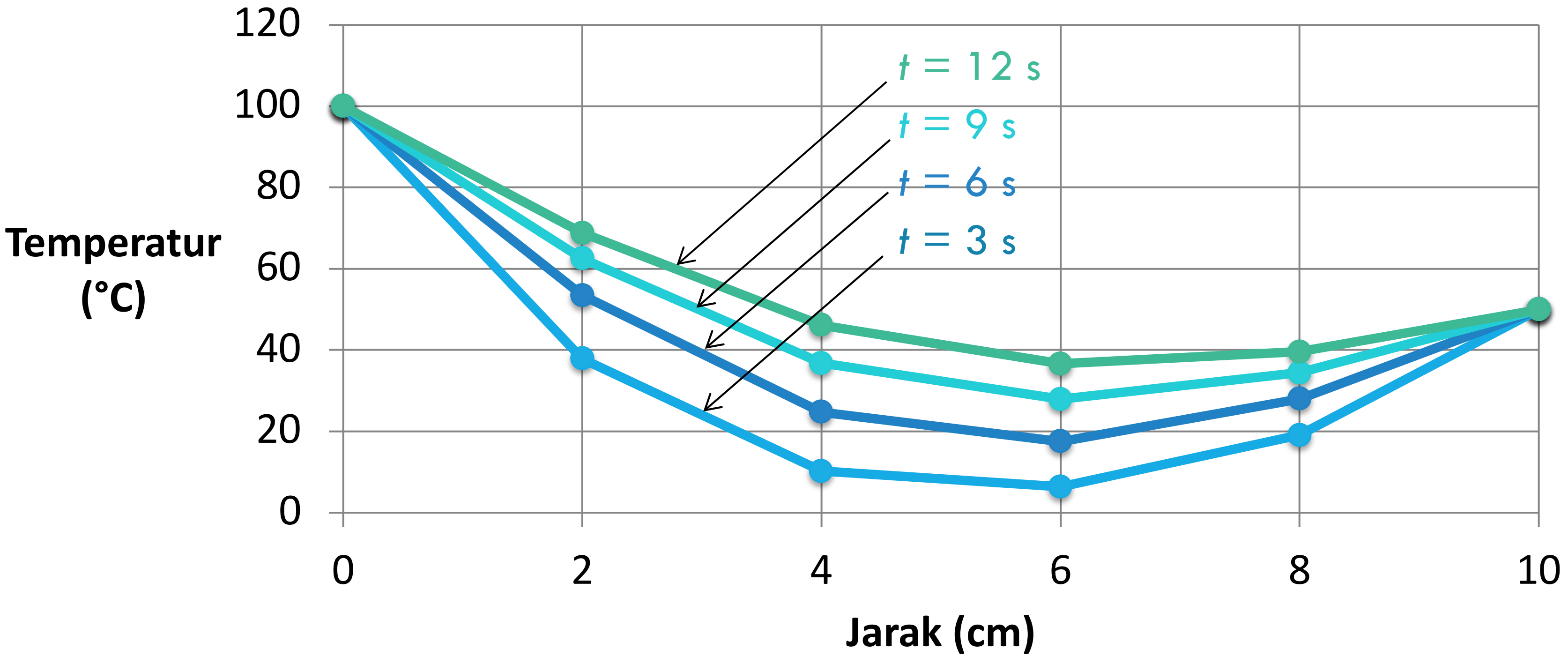
FDA: Skema Eksplisit

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)\left(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n\right) \qquad i = 1,2,3,4$$

langkah	waktu (s)	temperatur (°C) di titik hitung					
n	***t***	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
0	0	100	0	0	0	0	50
1	0.1	100	2.0875	0	0	1.0438	50
2	0.2	100	4.0878	0.0436	0.0218	2.0439	50
3	0.3	100	6.0056	0.1275	0.0645	3.0028	50
4	0.4	100	7.8450	0.2489	0.1271	3.9225	50
5	0.5	100	9.6102	0.4050	0.2089	4.8052	50

Hitungan diteruskan sampai t = 12 s

FDA: Skema Eksplisit



FDA: Skema Eksplisit

- Konvergensi dan stabilitas hitungan
  - Konvergensi berarti bahwa jika Δ*x* dan Δ*t* mendekati nol, maka penyelesaian FDA mendekati penyelesaian eksak.
  - Stabilitas berarti bahwa kesalahan hitungan di setiap tahap hitungan tidak mengalami amplifikasi, tetapi mengecil seiring dengan langkah hitungan.
- Skema eksplisit konvergen dan stabil jika

$$k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}$$

$$\Delta t \le \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{k}$$

$$k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \begin{cases} \le \frac{1}{2} & \text{dapat terjadi oskilasi kesalahan hitungan} \\ \le \frac{1}{4} & \text{tidak terjadi oskilasi kesalahan hitungan} \\ = 1/6 & \text{meminimumkan } \textit{truncation error} \end{cases}$$

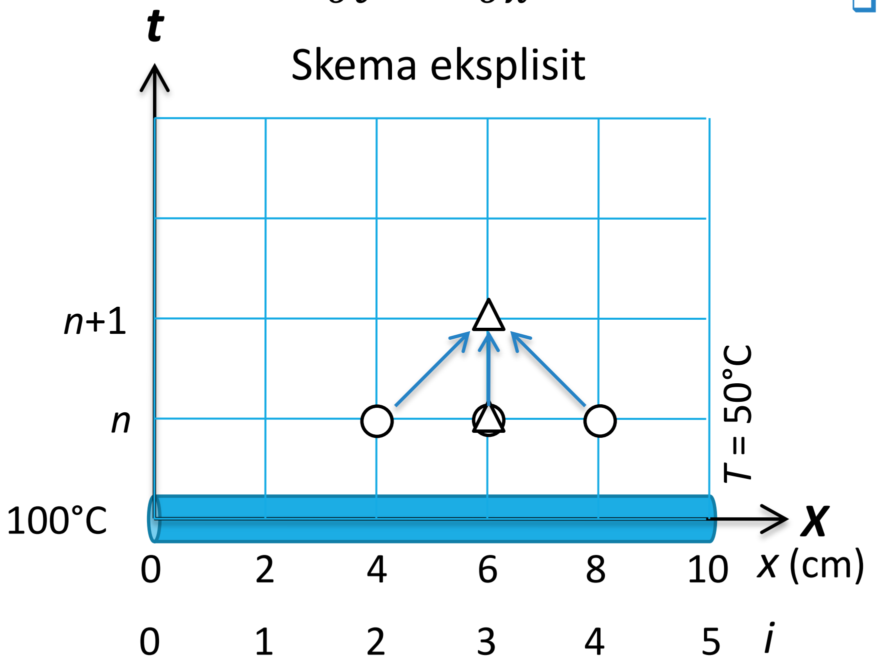
FDA: Skema Eksplisit

- Konvergensi dan stabilitas hitungan
  - untuk mendapatkan akurasi hasil hitungan, dibutuhkan Δ*x* kecil, namun
  - konsekuensi Δ*x* kecil adalah Δ*t* pun harus kecil untuk menjamin konvergensi dan kestabilan hitungan
  - jika Δx dikalikan faktor ½, maka Δ*t* perlu dikalikan faktor ¼ untuk mempertahankan konvergensi dan kestabilan hitungan
  - skema eksplisit menjadi mahal, dalam arti beban hitungan bertambah besar

$$k\,\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}$$

FDA: Skema Eksplisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

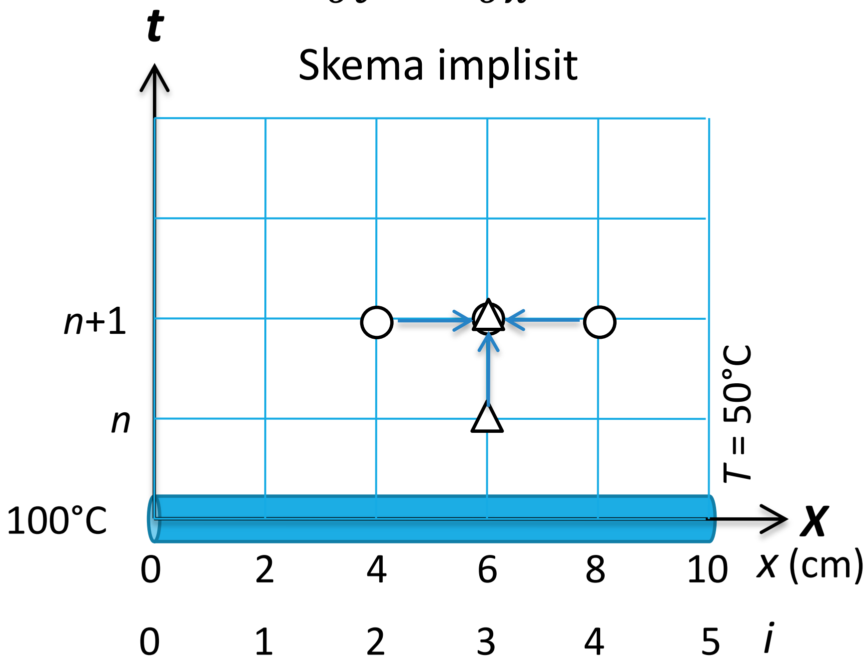


- Konduksi termal di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - panjang batang, L = 10 cm, Δx = 2 cm
  - *time step*, Δt = 0.1 s
  - koefisien difusi termal, k = 0.835 cm^2/s
  - syarat batas: $T(x=0,t)$= 100°C dan $T(x=10,t)$ = 50°C
  - nilai awal: $T(x,t=0)$ = 0°C

Hitung dengan skema eksplisit

FDA: Skema Implisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



- Konduksi termal di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - panjang batang, L = 10 cm, Δx = 2 cm
  - *time step*, Δt = 0.1 s
  - koefisien difusi termal, k = 0.835 cm²/s
  - syarat batas: $T(x=0,t)$= 100°C dan $T(x=10,t)$ = 50°C
  - nilai awal: $T(x,t=0)$ = 0°C

$$\left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n+1} + \cdots$$

$$+\left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

FDA: Skema Implisit

$$\left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1}+\left(1+2k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n+1}+\left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1}=T_i^n$$

$$k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}=0.020875 \qquad 1+2k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}=1.04175$$

- Hitungan pada saat n+1=1 atau t+Δt = 0.1 s

	T_1	T_2	T_3	T_4		
node 1	$+1.04175T_1^1$	$-0.020875T_2^1$			$=$	$T_1^0+0.020875T_0$
node 2	$-0.020875T_1^1$	$+1.04175T_2^1$	$-0.020875T_3^1$		$=$	T_2^0
node 3		$-0.020875T_2^1$	$+1.04175T_3^1$	$-0.020875T_4^1$	$=$	T_3^0
node 4			$-0.020875T_3^1$	$+1.04175T_4^1$	$=$	$T_4^0+0.020875T_5$

FDA: Skema Implisit

- Diperoleh 4 persamaan dengan 4 *unknowns*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.041750 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 1.041750 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 1.041750 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 1.041750 \end{bmatrix}}_{\text{matriks tridiagonal}} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{Bmatrix}$$

- Apabila jumlah persamaan banyak, maka penyelesaian persamaan di atas dilakukan dengan bantuan program komputer.
- Salah satu teknik penyelesaian yang dapat dipakai adalah *tridiagonal matrix algorithm* (TDMA), yang dapat diperoleh dari internet.

FDA: Skema Implisit

- Karena hanya 4 persamaan, penyelesaian masih mudah dilakukan dengan bantuan *spreadsheet* MSExcel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.041750 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 1.041750 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 1.041750 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 1.041750 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix}}_{\{T\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{Bmatrix}}_{\{RHS\}}$$

{T} = [A]$^{-1}$ {RHS}

Gunakan fungsi =MINVERSE(…) dan =MMULT(…) dalam MSExcel

FDA: Skema Implisit

- Penyelesaian persamaan tsb dengan bantuan spreadsheet MSExcel adalah sbb.

$$\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.960309 & 0.019251 & 0.000386 & 0 \\ 0.019251 & 0.960695 & 0.019259 & 0.000386 \\ 0.000386 & 0.019259 & 0.960695 & 0.019251 \\ 0 & 0.000386 & 0.000386 & 0.960309 \end{bmatrix}}_{[A]^{-1}} \begin{Bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.004653 \\ 0.040589 \\ 0.020899 \\ 1.002339 \end{Bmatrix}$$

{T} [A]$^{-1}$ {RHS}

FDA: Skema Implisit

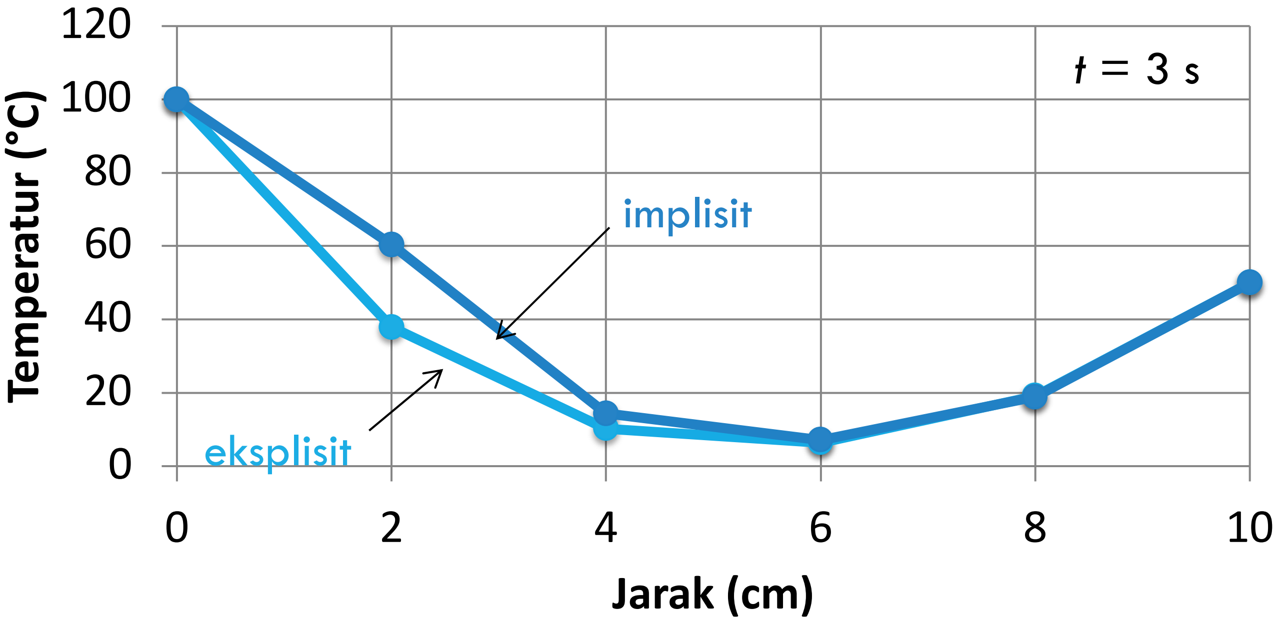
- Hitungan pada saat *n*+1=2 atau *t*+Δ*t* = 0.2 s
  - Matriks koefisien persamaan [A] tidak berubah
  - Matriks di sebelah kanan tanda "=" berubah dan merupakan fungsi *T* pada saat *n*=1

$$\{\mathrm{RHS}\} = \begin{Bmatrix} T_1^1 + 0.020875 T_0 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 + 0.020875 T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.092153 \\ 0.040589 \\ 0.020899 \\ 2.046089 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.960309 & 0.019251 & 0.000386 & 0 \\ 0.019251 & 0.960695 & 0.019259 & 0.000386 \\ 0.000386 & 0.019259 & 0.960695 & 0.019251 \\ 0 & 0.000386 & 0.000386 & 0.960309 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.092153 \\ 0.040589 \\ 0.020899 \\ 2.046089 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.930536 \\ 0.118963 \\ 0.061827 \\ 1.965327 \end{Bmatrix}$$

FDA: Skema Implisit

Konduksi atau perambatan termal hasil hitungan dengan skema implisit tampak lebih cepat daripada hasil hitungan dengan skema eksplisit (pada t = 3 s).



FDA: Skema Eksplisit dan Implisit

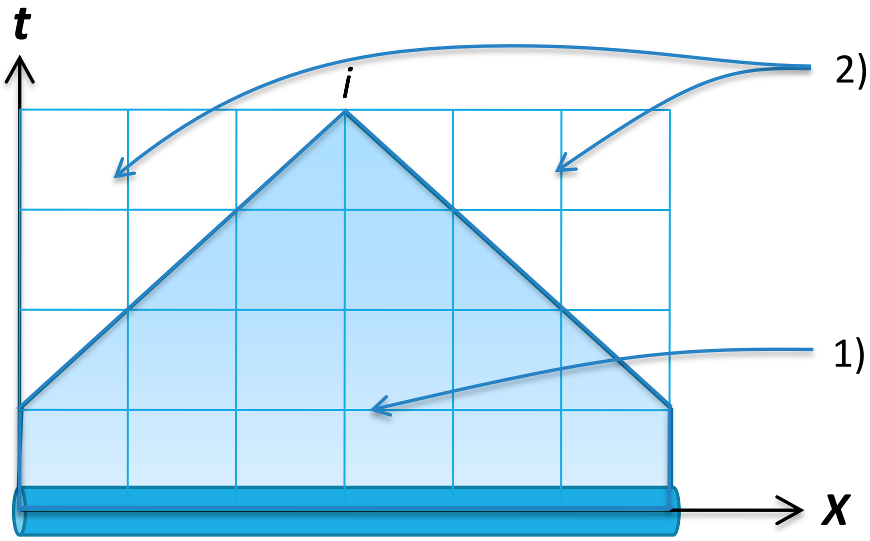
Skema eksplisit

- Persamaan dan teknik penyelesaiannya *straight-forward*, penyelesaian dilakukan *node* per *node.*
- Rentan terhadap konvergensi dan stabilitas hitungan.
- *Time step* terkendala oleh konvergensi dan stabilitas hitungan.

Skema implisit

- Persamaan dan teknik penyelesaian lebih "rumit", penyelesaian dilakukan secara simultan untuk samua *node.*
- Konvergensi dan stabilitas hitungan lebih mudah dijaga.
- *Time step* tidak terkendala oleh konvergensi dan stabilitas hitungan.

FDA: Skema Eksplisit dan Implisit



Skema Eksplisit

2) Saat menghitung *T* di *i*, titik-titik hitung (*nodes*) di kedua zona ini tidak diperhitungkan, padahal secara fisik, justru node-node di sini berpengaruh thd *T* di titik *i*.

1) Saat menghitung *T* di *i*, hanya titik-titik hitung *(nodes)* di dalam segitiga ini yang berpengaruh dalam hitungan.

FDA: Skema Eksplisit dan Implisit

Skema Implisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k\,\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

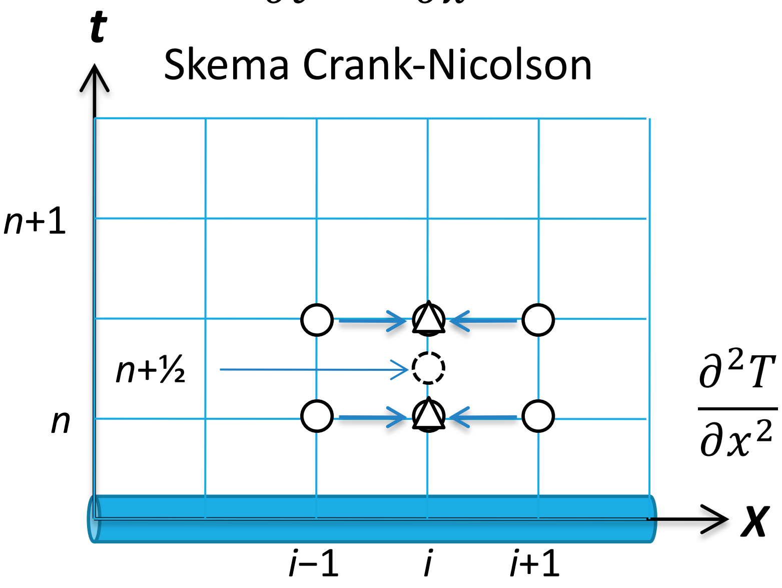
1st order accurate *2nd order accurate*

1) Skema implisit menjamin konvergensi dan stabilitas hitungan, namun aproksimasi suku derivatif waktu dan suku derivatif ruang memiliki akurasi berbeda.

2) Skema implisit yang memiliki akurasi yang sama pada aproksimasi suku derivatif waktu dan ruang adalah Metode **Crank-Nicolson**.

FDA: Metode Crank-Nicolson

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



- Aproksimasi suku derivatif waktu ditempatkan pada waktu *n*+½

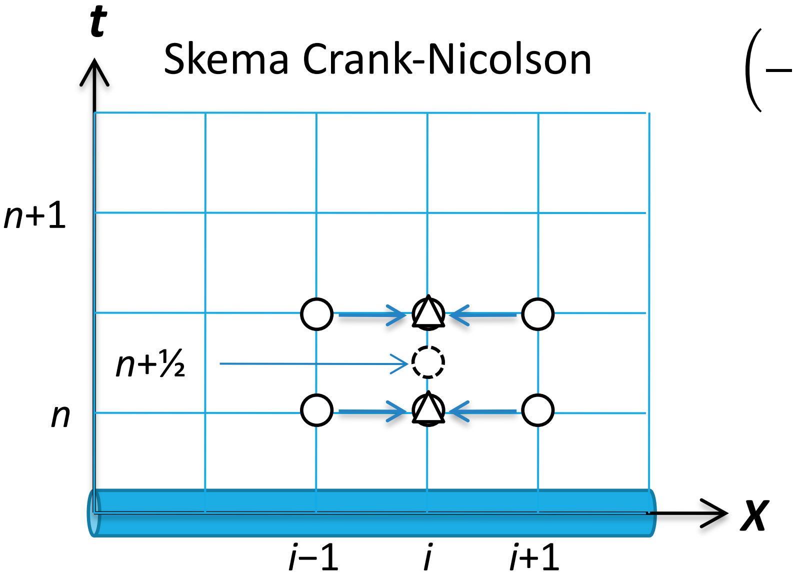
$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

- Aproksimasi suku derivatif ruang pada waktu *n*+½ dianggap sbg nilai rerata derivatif pada waktu *n* dan *n*+1

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right)$$

FDA: Metode Crank-Nicolson

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



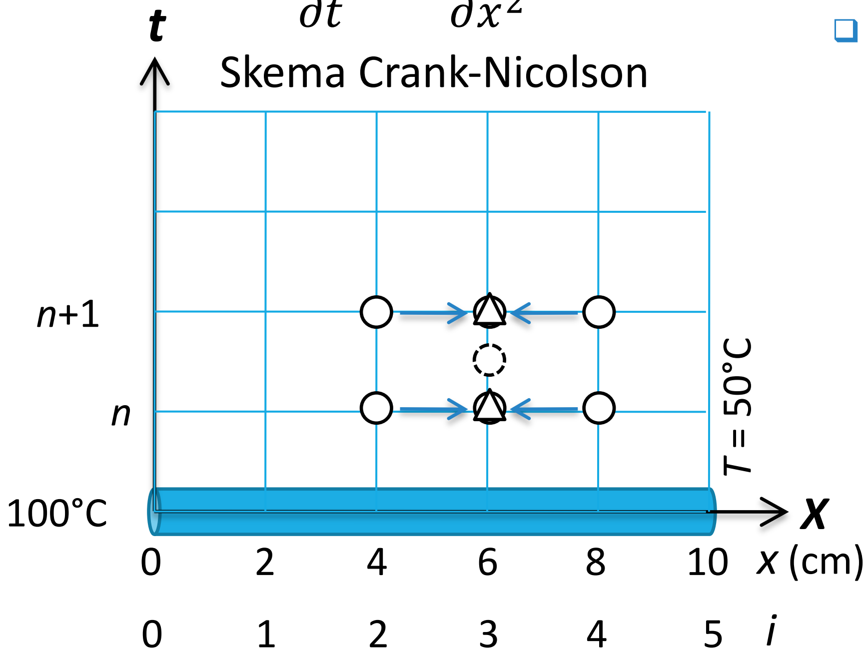
- Bentuk beda hingga persamaan parabolik dengan demikian dapat dituliskan sbb.

$$\left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1} + 2\left(1+k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n+1} + \left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1} =$$

$$\left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n} + 2\left(1-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n} + \left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n}$$

FDA: Skema Crank-Nicolson

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



- Konduksi termal di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - panjang batang, L = 10 cm, Δx = 2 cm
  - *time step*, Δt = 0.1 s
  - koefisien difusi termal, k = 0.835 cm²/s
  - syarat batas: $T(x=0,t)$= 100°C dan $T(x=10,t)$ = 50°C
  - nilai awal: $T(x,t=0)$ = 0°C

FDA: Skema Crank-Nicolson

$$\left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1} + 2\left(1 + k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n+1} + \left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1} = \left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n} + 2\left(1 - k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n} + \left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n}$$

$$k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.020875 \qquad 2\left(1 + k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) = 2.04175 \qquad 2\left(1 - k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) = 1.95825$$

- Hitungan pada saat *n*+1=1 atau *t*+Δ*t* = 0.1 s:

$$\begin{array}{lccccccc}
 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & & \\
\text{node 1} & +2.04175T_1^1 & -0.020875T_2^1 & & & = & 4.1750 \\
\text{node 2} & -0.020875T_1^1 & +2.04175T_2^1 & -0.020875T_3^1 & & = & 0 \\
\text{node 3} & & -0.020875T_2^1 & +2.04175T_3^1 & -0.020875T_4^1 & = & 0 \\
\text{node 4} & & & -0.020875T_3^1 & +2.04175T_4^1 & = & 2.0875
\end{array}$$

FDA: Skema Crank-Nicolson

- Diperoleh 4 persamaan dengan 4 *unknowns*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2.041750 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 2.041750 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 2.041750 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 2.041750 \end{bmatrix}}_{\text{matriks tridiagonal}} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix}$$

- Apabila jumlah persamaan banyak, maka penyelesaian dilakukan dengan bantuan program komputer.
- Salah satu teknik penyelesaian yang dapat dipakai adalah *tridiagonal matrix algorithm* (TDMA) yang dapat diperoleh dari internet.

FDA: Skema Crank-Nicolson

- Karena hanya 4 persamaan, penyelesaian masih mudah dilakukan dengan bantuan *spreadsheet* MSExcel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2.041750 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 2.041750 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 2.041750 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 2.041750 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix}}_{\{T\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix}}_{\{RHS\}}$$

$\{T\} = [A]^{-1}\ \{RHS\}$

Gunakan fungsi =MINVERSE(…) dan =MMULT(…) dalam MSExcel

FDA: Skema Crank-Nicolson

- Penyelesaian persamaan tsb dengan bantuan *spreadsheet* MSExcel adalah sbb.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix}}_{\{T\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.489827 & 0.005009 & 0 & 0 \\ 0.005009 & 0.489827 & 0.005009 & 0 \\ 0 & 0.005009 & 0.489827 & 0.005009 \\ 0 & 0 & 0.005009 & 0.489827 \end{bmatrix}}_{[A]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix}}_{\{RHS\}} = \begin{Bmatrix} 2.045029 \\ 0.021018 \\ 0.010669 \\ 1.022516 \end{Bmatrix}$$

FDA: Skema Crank-Nicolson

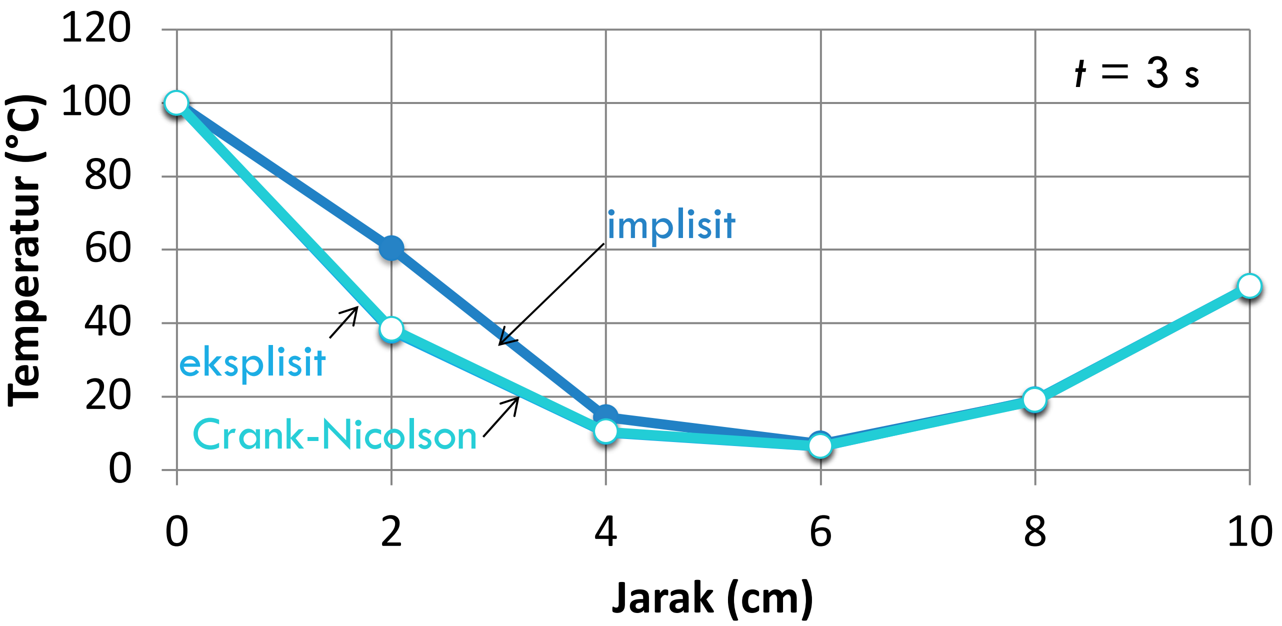
- Hitungan pada saat *n*+1=2 atau *t*+Δ*t* = 0.2 s
  - Matriks koefisien persamaan [A] tidak berubah
  - Matriks di sebelah kanan tanda “=“ berubah dan merupakan fungsi *T* pada saat *n*=1

$$\{\mathrm{RHS}\} = \begin{Bmatrix} 8.180118 \\ 0.084070 \\ 0.042677 \\ 4.090065 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.489827 & 0.005009 & 0 & 0 \\ 0.005009 & 0.489827 & 0.005009 & 0 \\ 0 & 0.005009 & 0.489827 & 0.005009 \\ 0 & 0 & 0.005009 & 0.489827 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8.180118 \\ 0.084070 \\ 0.042677 \\ 4.090065 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.007269 \\ 0.082578 \\ 0.042232 \\ 2.003647 \end{Bmatrix}$$

FDA: Skema Crank-Nicolson

Konduksi atau perambatan termal hasil hitungan dengan skema Crank-Nicolson tampak mirip dengan hasil hitungan dengan skema eksplisit (pada t = 3 s).



FDA: Skema Crank-Nicolson

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

FDA

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \phi \left(k \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \phi) \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

- Skema FDA
  - $\phi = 0$ skema eksplisit
  - $\phi = 1$ skema implisit
  - $\phi = ½$ skema Crank-Nicolson

https://istiarto.staff.ugm.ac.id

FDA Persamaan Parabolik

- Bentuk umum FDA persamaan diferensial parsial parabolik

$$\left(-\phi k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1}+\left(1+2\phi k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i}^{n+1}+\left(-\phi k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1}=\left[(1-\phi)k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right]T_{i-1}^{n}+\cdots$$

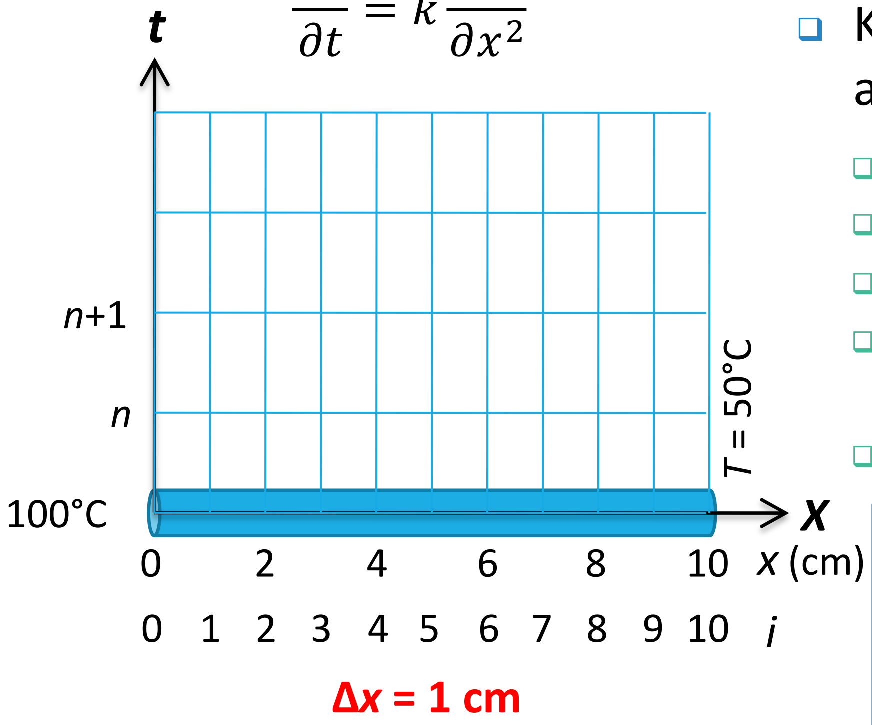
$$\left[1-2(1-\phi)k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right]T_{i}^{n}+\cdots$$

$$\left[(1-\phi)k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right]T_{i+1}^{n}$$

- Skema FDA
  - ϕ = 0 skema eksplisit
  - ϕ = 1 skema implisit
  - ϕ = ½ skema Crank-Nicolson

FDA: Persamaan Parabolik

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



- Konduksi termal di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - **panjang batang, L = 10 cm, Δx = 1 cm (!!)**
  - *time step*, Δt = 0.1 s
  - koefisien difusi termal, k = 0.835 cm^2/s
  - syarat batas: $T(x=0,t)$= 100°C dan $T(x=10,t)$ = 50°C
  - nilai awal: $T(x,t=0)$ = 0°C

- Hitung sampai *steady-state condition*
  - Skema eksplisit
  - Skema implisit
  - Skema Crank-Nicolson

PR/ Tugas

Terima kasih