

Daftar Isi

3	Metode Volume Hingga.....	1
3.1	Transpor Difusif.....	1
3.1.1	Persamaan Transpor Difusif 1D	1
3.1.2	Solusi Numerik Persamaan Transpor Difusif 1D dengan Metode Volume Hingga.....	1
3.2	Transpor Konvektif-Difusif.....	12
3.2.1	Persamaan Transpor Konvektif-Difusif 1D.....	12
3.2.2	<i>Central Difference Scheme</i>	13
3.2.3	<i>Upwind Difference Scheme</i>	27
3.2.4	<i>Hybrid Difference Scheme</i>	36
3.2.5	<i>Power Law Scheme</i>	43
3.2.6	<i>QUICK Scheme</i>	47
3.2.7	Perbandingan Hasil Hitungan Berbagai Skema Penyelesaian	54
	Pustaka Acuan.....	54

3 Metode Volume Hingga

3.1 Transpor Difusif

3.1.1 Persamaan Transpor Difusif 1D

Dalam topik kuliah yang lalu, yaitu metode beda hingga, telah dikenalkan persamaan konduksi termal (konduksi panas), yang tidak lain adalah persamaan transpor difusif atau persamaan difusi. Persamaan konduksi termal dalam bidang satu dimensi adalah

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Dalam persamaan di atas, T adalah temperatur medium, k adalah koefisien difusi termal medium, t adalah waktu, dan x adalah jarak. Persamaan konduksi termal di atas merupakan persamaan transpor termal dalam bentuk transpor difusif. Bentuk umum persamaan transpor difusif sembarang skalar adalah

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Dalam persamaan di atas, ϕ adalah sembarang skalar dan Γ adalah koefisien difusi. Perhatikan bahwa letak Γ dalam persamaan di atas berbeda dengan letak k dalam persamaan konduksi termal. Dalam persamaan transpor difusif di atas, nilai koefisien difusi tidak harus homogen di seluruh medium. Ketika difusi telah mencapai permanen (*steady-state condition*, *steady diffusion*), yaitu ketika difusi tidak bergantung kepada waktu, maka $\partial \phi / \partial t = 0$. Persamaan transpor difusif permanen adalah

$$\frac{d}{dx} \Gamma \frac{d\phi}{dx} = 0$$

Perhatikan notasi diferensial yang berubah dari diferensial parsial menjadi diferensial biasa. Nilai skalar ϕ merupakan fungsi tempat saja, $\phi(x)$. Apabila ada *source*, maka persamaan transpor difusif menjadi

$$\frac{d}{dx} \Gamma \frac{d\phi}{dx} = R$$

Dalam persamaan di atas, R adalah *source* atau *sink*. Variabel *source* atau *sink* merepresentasikan massa yang masuk ke dalam sistem atau keluar dari sistem.

3.1.2 Solusi Numerik Persamaan Transpor Difusif 1D dengan Metode Volume Hingga

Penerapan metode volume hingga untuk penyelesaian persamaan difusi dilakukan melalui contoh kasus. Dalam kuliah topik metode beda hingga, telah dibahas kasus konduksi termal melalui sebuah batang. Gambar 3.1 menyajikan skema kasus konduksi termal ini. Sebuah batang logam bulat-panjang dibungkus isolator termal, kecuali di pangkal dan ujung batang

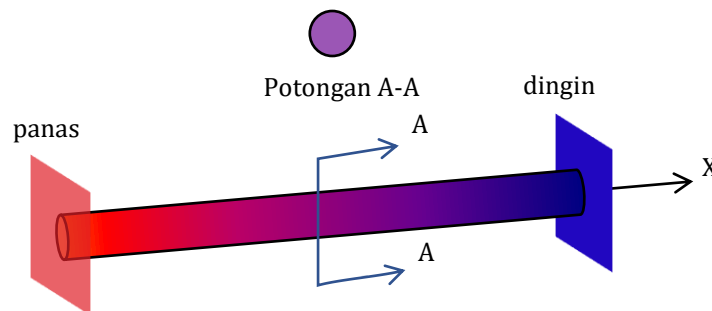
yang memiliki temperatur berbeda, panas di pangkal dan dingin di ujung. Diameter batang adalah 6 mm, panjang batang adalah 10 cm, temperatur di pangkal batang adalah 100°C, temperatur di ujung batang adalah 50°C, dan koefisien difusi termal batang logam adalah 0.835 cm²/s. Persamaan konduksi termal melalui batang ketika konduksi telah konstan (*steady*) mengikuti persamaan transpor difusif yang berbentuk

$$\frac{d}{dx} k \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \Gamma \frac{d\phi}{dx} = R$$

Langkah hitung penyelesaian numerik persamaan di atas mengikuti langkah berikut.

- 1) Pengubahan domain hitung kontinu menjadi domain hitung diskret, yang lazim dikenal sebagai diskretisasi domain hitung.
- 2) Penyusunan persamaan diferensial difusi atau konduksi termal dalam domain diskret, yang dikenal sebagai diskretisasi persamaan.
- 3) Penyelesaian sistem persamaan diskret, yang berupa sistem persamaan aljabar linear, untuk mendapatkan variabel yang tidak diketahui.

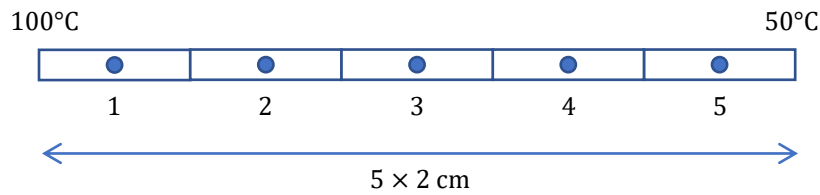
Paragraf-paragraf di bawah ini memaparkan secara rinci langkah hitung penyelesaian numerik persamaan transpor difusif permanen.



Gambar 3.1 Konduksi termal melalui sebuah batang

1 Diskretisasi Domain Hitung

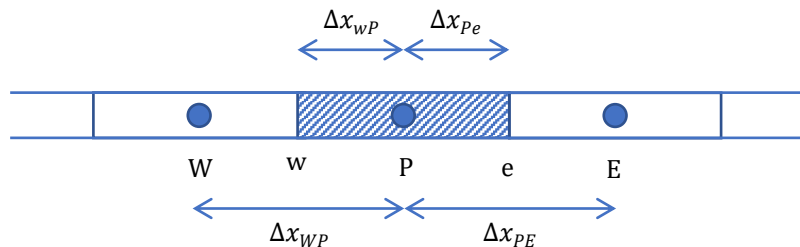
Domain hitung, dalam hal ini batang logam, dibagi menjadi sejumlah volume kontrol (*control volume*) diskret, atau sering pula disebut dengan *cell*. Volume kontrol di dekat batas domain hitung diletakkan dengan menempatkan sisi volume kontrol berimpit dengan batas domain hitung. Titik hitung (*node*) adalah titik tengah volume kontrol. Dalam kasus difusi melalui batang ini, domain hitung dibagi menjadi lima volume kontrol berukuran seragam. Setiap volume kontrol memiliki panjang dua centimeter. Gambar 3.2 menunjukkan kelima volume kontrol ini.



Gambar 3.2 Diskretisasi domain hitung transpor difusif menjadi 5 volume kontrol berukuran seragam, panjang 2 cm

2 Diskretisasi Persamaan Transpor Difusif

Gambar 3.3 menampilkan sebuah volume kontrol yang dicuplik dari Gambar 3.2. Titik hitung sebuah volume kontrol diidentifikasi oleh simbol P yang memiliki volume kontrol tetangga di sisi kiri, W (*West*), dan di sisi kanan, E (*East*). Bidang sisi-sisi volume kontrol diberi notasi w (*west*) di sisi kiri dan notasi e (*east*) di sisi kanan.



Gambar 3.3 Sebuah volume kontrol transpor difusif

Integrasi persamaan diferensial transpor difusif permanen satu dimensi untuk sebuah volume kontrol adalah

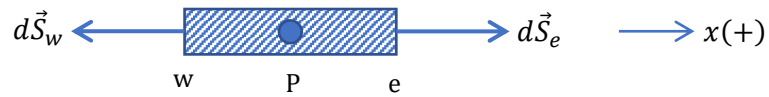
$$\iiint \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV = \iiint R dV$$

Dengan penerapan teorema divergensi (teorema Gauss), integral volume suku difusi di sisi kiri tanda kesamaan berubah menjadi integral luasan tertutup yang menyelimuti volume kontrol.

$$\iint \Gamma \frac{d\phi}{dx} \vec{n} \cdot d\vec{S} = \iiint R dV$$

Dalam persamaan di atas, $\vec{S}$ adalah vektor luas yang memiliki arah tegak lurus ke arah luar selimut volume kontrol (Gambar 3.4). Untuk volume kontrol satu dimensi (Gambar 3.3), persamaan di atas dapat diubah menjadi

$$-\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} S \right)_w + \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} S \right)_e = \bar{R} \Delta V$$

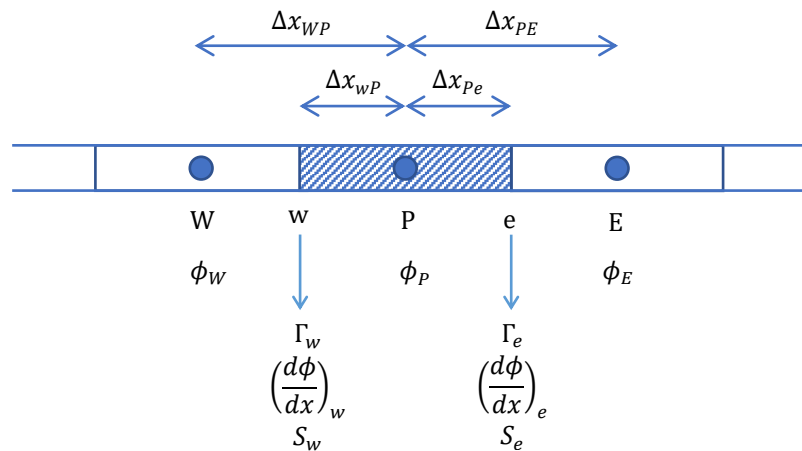


Gambar 3.4 Vektor luas selimut volume kontrol satu dimensi

Dalam persamaan di atas, S adalah luas sisi volume-kontrol, ΔV adalah volume volume-kontrol, dan $\bar{R}$ adalah *source* rerata di dalam volume kontrol. Variabel-variabel di sebelah kiri tanda kesamaan dituliskan secara terpisah menjadi

$$-\Gamma_w \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w S_w + \Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e S_e = \bar{R} \Delta V$$

Dalam persamaan di atas, Γ_w dan Γ_e adalah koefisien difusi di bidang sisi kiri, w , dan sisi kanan, e , volume kontrol. Gradien variabel skalar $(d\phi/dx)_w$ dan $(d\phi/dx)_e$ adalah gradien variabel skalar di sisi kiri, w , dan sisi kanan, e , volume kontrol. Demikian pula, S_w dan S_e adalah luas bidang sisi kiri, w , dan sisi kanan, e , volume kontrol. Tampak bahwa suku-suku di sisi kiri tanda kesamaan merupakan variabel-variabel atau gabungan variabel-variabel di sisi volume kontrol. Padahal, variabel-variabel yang dicari adalah variabel-variabel di volume kontrol, yaitu di P , W , dan E , kecuali luas sisi, S_w dan S_e , yang memang variabel yang diketahui di sisi volume kontrol (Gambar 3.5). Nilai variabel-variabel di sisi volume kontrol itu dikaitkan dengan variabel-variabel di volume kontrol dengan cara sebagai berikut.



Gambar 3.5 Posisi variabel-variabel dalam persamaan transpor difusif di sebuah volume kontrol

Nilai koefisien difusi Γ_w dan Γ_e dihitung dengan cara interpolasi linear dari nilai-nilai di dua volume-kontrol tetangga kiri dan kanan.

$$\Gamma_w = \frac{\Delta x_{wP} \Gamma_W + \Delta x_{Ww} \Gamma_P}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}}$$

$$\Gamma_e = \frac{\Delta x_{eE} \Gamma_P + \Delta x_{Pe} \Gamma_E}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}}$$

Cara interpolasi linear untuk menghitung nilai-nilai di sisi volume kontrol di atas dikenal dengan istilah beda hingga tengah (*central difference*). Apabila ukuran volume kontrol seragam, maka koefisien difusi di sisi-sisi volume kontrol menjadi

$$\Gamma_w = \frac{1}{2}(\Gamma_W + \Gamma_P)$$

$$\Gamma_e = \frac{1}{2}(\Gamma_P + \Gamma_E)$$

Gradien variabel skalar di sisi-sisi volume kontrol dihitung dengan menerapkan beda hingga maju (*forward difference*).

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}}$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}}$$

Luas sisi-sisi volume kontrol diketahui. Misalnya, sisi yang berbentuk lingkaran memiliki luas $\pi/4 d^2$.

Bentuk persamaan diskret transpor difusif permanen di sebuah volume kontrol, dengan demikian, adalah

$$\underbrace{-\left(\frac{\Delta x_{WP}\Gamma_W + \Delta x_{WW}\Gamma_P}{\Delta x_{WW} + \Delta x_{WP}}\right)}_{\Gamma_w} \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}}\right) S_w + \underbrace{\left(\frac{\Delta x_{eE}\Gamma_P + \Delta x_{Pe}\Gamma_E}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}}\right)}_{\Gamma_e} \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}}\right) S_e = \bar{R}\Delta V$$
$$-\Gamma_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}}\right) S_w + \Gamma_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}}\right) S_e = \bar{R}\Delta V$$

Pengelompokan koefisien dalam persamaan di atas menghasilkan persamaan

$$\left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}}\right) \phi_W + \left(-\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}}\right) \phi_P + \left(\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}}\right) \phi_E = \bar{R}\Delta V$$

Persamaan diskret transpor difusif di atas merupakan persamaan diskret di setiap volume kontrol. Untuk lima volume kontrol (Gambar 3.2), diperoleh lima persamaan. Nilai variabel ϕ di setiap volume kontrol, ϕ_P , merupakan fungsi nilai-nilai ϕ di dua volume kontrol tetangga, ϕ_W dan ϕ_E . Volume kontrol yang berada di pangkal dan ujung batang, yaitu volume kontrol 1 dan 5, hanya memiliki satu tetangga. Salah satu sisi volume kontrol 1 dan 5 berimpit dengan batas domain hitung. Di batas domain, nilai ϕ diketahui. Nilai ini dikenal sebagai syarat batas (*boundary conditions*). Paragraf-paragraf di bawah ini memaparkan penyusunan kelima persamaan diskret transpor difusif. Paparan berawal dari penyusunan persamaan diskret volume kontrol 2, 3, dan 4 yang tidak berbatasan dengan domain hitung.

Volume kontrol 2, 3, 4. Telah ditetapkan bahwa ukuran volume-kontrol seragam, $\Delta x = 2$ cm, koefisien difusi seragam, $\Gamma = 0.835$ cm²/s, dan luas sisi volume-kontrol seragam, $S = \pi/4 \times 0.6^2 = 0.2827$ cm², dan tanpa *source* atau *sink*, $\bar{R} = R = 0$. Persamaan diskret transpor difusif di volume kontrol 2, 3, dan 4 adalah

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_w + \left(-\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_P + \left(\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E = \bar{R} \Delta V \\ \Rightarrow & \left(\frac{0.835 \times \pi/4 \times 0.6^2}{2} \right) \phi_w + \left(-\frac{0.835 \times \pi/4 \times 0.6^2}{2} - \frac{0.835 \times \pi/4 \times 0.6^2}{2} - 0 \right) \phi_P \\ & + \left(\frac{0.835 \times \pi/4 \times 0.6^2}{2} \right) \phi_E = 0 \\ \Rightarrow & 0.118 \phi_w - 0.236 \phi_P + 0.118 \phi_E = 0 \end{aligned}$$

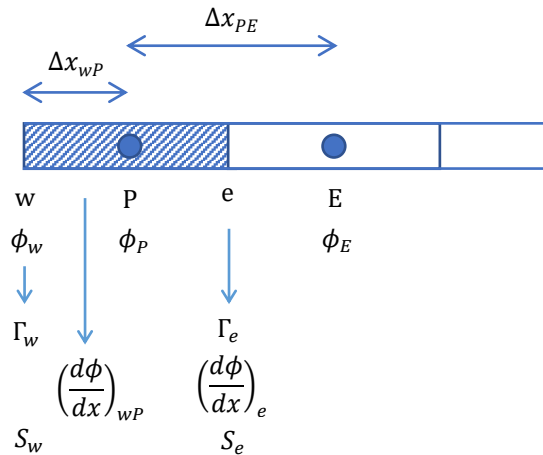
Persamaan diskret transpor difusif di ketiga volume kontrol, dengan demikian, adalah

$$\begin{aligned} cv \ 2: & \ 0.118 \phi_1 - 0.236 \phi_2 + 0.118 \phi_3 = 0 \\ cv \ 3: & \ 0.118 \phi_2 - 0.236 \phi_3 + 0.118 \phi_4 = 0 \\ cv \ 4: & \ 0.118 \phi_3 - 0.236 \phi_4 + 0.118 \phi_5 = 0 \end{aligned}$$

Notasi *cv* merujuk kepada volume kontrol (*control volume*).

Volume kontrol 1. Gambar 3.6 menampilkan volume kontrol 1. Sisi kiri volume kontrol ini, *w*, berimpit dengan batas domain hitung. Volume kontrol ini tidak memiliki volume kontrol tetangga kiri. Volume kontrol *W* tidak ada. Di sebelah kanannya, volume kontrol ini bertetangga dengan volume kontrol 2, yang menjadi volume kontrol *E*. Persamaan diskret transpor difusif di volume kontrol 1 berbentuk

$$-\Gamma_w \underbrace{\left(\frac{\phi_P - \phi_w}{\Delta x_{WP}} \right)}_{\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_{WP}} S_w + \Gamma_e \underbrace{\left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right)}_{\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e} S_e = \bar{R} \Delta V$$



Gambar 3.6 Volume kontrol di batas kiri domain hitung transpor difusif

Dengan pengelompokan koefisien, diperoleh

$$\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \phi_w + \left(-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_P + \left(\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E = \bar{R} \Delta V$$

Temperatur di batas kiri batang diketahui, $\phi_w = 100^\circ\text{C}$. Suku pertama dalam persamaan di atas dipindahkan ke sisi kanan tanda kesamaan. Di volume kontrol 1 ini, tidak ada *source* atau pun *sink*.

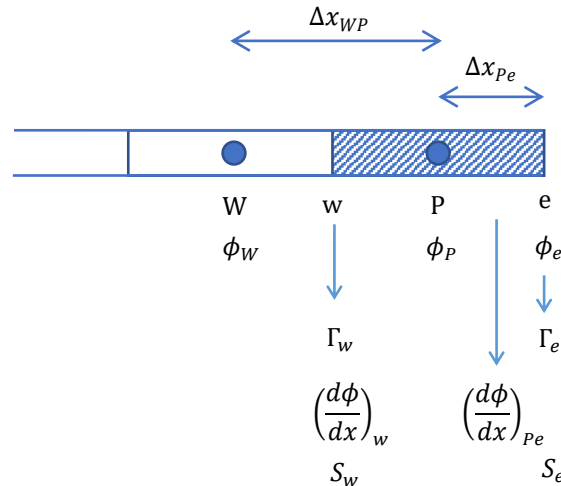
$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_P + \left(\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E = \bar{R} \Delta V - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \phi_w \\ \Rightarrow & \left(-\frac{0.875 \times \pi/4 \times 0.6^2}{2} - \frac{0.875 \times \pi/4 \times 0.6^2}{1} \right) \phi_P + \left(\frac{0.875 \times \pi/4 \times 0.6^2}{2} \right) \phi_E \\ & = 0 - \frac{0.875 \times \pi/4 \times 0.6^2}{1} \times 100 \\ \Rightarrow & -0.354 \phi_P + 0.118 \phi_E = -23.6 \end{aligned}$$

Persamaan diskret transpor difusif di volume kontrol 1, dengan demikian, adalah

$$cv \ 1: \quad -0.354 \phi_1 + 0.118 \phi_2 = -23.6$$

Volume kontrol 5. Gambar 3.7 menampilkan volume kontrol 5. Di sebelah kirinya, volume kontrol ini bertetangga dengan volume kontrol 4, yang menjadi volume kontrol W. Sisi kanan volume kontrol ini, *e*, berimpit dengan batas domain hitung. Volume kontrol ini tidak memiliki volume kontrol tetangga kanan. Volume kontrol E tidak ada. Persamaan diskret transpor difusif di volume kontrol 5 adalah

$$-\Gamma_w S_w \underbrace{\left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right)}_{\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w} + \Gamma_e \underbrace{\left(\frac{\phi_e - \phi_P}{\Delta x_{Pe}} \right)}_{\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_{Pe}} S_e = \bar{R} \Delta V$$



Gambar 3.7 Volume kontrol di batas kanan domain hitung transpor difusif

Dengan pengelompokan koefisien, diperoleh

$$\left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_W + \left(-\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}} \right) \phi_P + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}} \phi_e = \bar{R} \Delta V$$

Temperatur di batas kanan batang diketahui, $\phi_e = 50^\circ\text{C}$, sehingga suku paling kanan dalam persamaan di atas dipindahkan ke sisi kanan tanda kesamaan. Di volume kontrol 5 ini, tidak ada *source* atau *sink*.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_w + \left(-\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}} \right) \phi_P = \bar{R} \Delta V - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}} \phi_e \\ \Rightarrow & \left(\frac{0.875 \times \pi/4 \times 0.6^2}{2} \right) \phi_w + \left(-\frac{0.875 \times \pi/4 \times 0.6^2}{2} - \frac{0.875 \times \pi/4 \times 0.6^2}{1} \right) \phi_P + \\ & = 0 - \frac{0.875 \times \pi/4 \times 0.6^2}{1} \times 50 \\ \Rightarrow & 0.118\phi_w - 0.354\phi_P = -11.8 \end{aligned}$$

Persamaan diskret transpor difusif di volume kontrol 5, dengan demikian, adalah

$$cv \ 5: \ 0.118\phi_4 - 0.354\phi_5 = -11.8$$

Persamaan diskret transpor difusif di lima volume kontrol membentuk satu sistem persamaan linear.

$$\begin{aligned} cv \ 1: & \ -0.354\phi_1 + 0.118\phi_2 = -23.6 \\ cv \ 2: & \ 0.118\phi_1 - 0.236\phi_2 + 0.118\phi_3 = 0 \\ cv \ 3: & \ 0.118\phi_2 - 0.236\phi_3 + 0.118\phi_4 = 0 \\ cv \ 4: & \ 0.118\phi_3 - 0.236\phi_4 + 0.118\phi_5 = 0 \\ cv \ 5: & \ 0.118\phi_4 - 0.354\phi_5 = -11.8 \end{aligned}$$

3 Cara Kedua Penyusunan Persamaan Diskret Transpor Difusif

Apabila volume kontrol berjumlah banyak, maka jumlah persamaan pun banyak. Cara penulisan persamaan diskret yang dipaparkan dalam butir 2 menjadi tidak praktis. Cara penulisan lain penulisan persamaan diskret transpor difusif adalah dengan menamai koefisien suku-suku persamaan diskret transpor difusif a_w, a_e, a_p . Persamaan diskret transpor difusif ditulis sebagai berikut.

$$a_w \phi_w + a_p \phi_p + a_e \phi_e = \bar{R} \Delta V$$

Suku *source* atau *sink* di sebelah kanan tanda kesamaan acap kali merupakan fungsi variabel skalar ϕ itu sendiri. Dengan pendekatan linear, maka suku *source* atau *sink* menjadi

$$\bar{R} \Delta V = R_u + R_p \phi_p$$

Persamaan diskret transpor difusif menjadi

$$a_w \phi_w + a_p \phi_p + a_e \phi_e = R_u + R_p \phi_p$$

$$a_w \phi_w + (a_p - R_p) \phi_p + a_e \phi_e = R_u$$

Untuk penyederhanaan tulisan, koefisien R_p digabungkan dengan a_p , sehingga a_p mengandung R_p . Dengan cara ini, persamaan diskret transpor difusif menjadi

$$a_w \phi_w + a_p \phi_p + a_e \phi_e = R_u$$

Bentuk persamaan diskret transpor difusif permanen di sebuah volume kontrol, dengan demikian, adalah

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_w + \left(-\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}} \right) \phi_p + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}} \phi_e &= R_u + R_p \phi_p \\ \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right)}_{a_w} \phi_w + \underbrace{\left(-\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}} - R_p \right)}_{a_p} \phi_p + \underbrace{\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}}}_{a_e} \phi_e &= R_u \end{aligned}$$

Koefisien a_w , a_e , dan a_p adalah

$$a_w = \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}}, \quad a_e = \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}}, \quad \text{dan} \quad a_p = -a_w - a_e - R_p$$

Penulisan koefisien persamaan seperti di atas menyingkat penulisan, terutama jika jumlah persamaan banyak. Cara penulisan seperti ini memiliki keunggulan apabila penyelesaian sistem persamaan linear dilakukan secara **pemrograman komputer**. Namun, ada kalanya penulisan koefisien secara ringkas ini menghasilkan persamaan yang sulit dibaca dan, terutama, sulit dipahami.

Di volume kontrol 2, 3, dan 4, koefisien-koefisien persamaan diskret transpor difusif adalah

$$R_u = R_p = 0$$

$$a_w = \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} = \frac{0.835 \times \pi/4 \times 0.6^2}{2} = 0.118 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$a_e = \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}} = \frac{0.835 \times \pi/4 \times 0.6^2}{2} = 0.118 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$a_p = -a_w - a_e - R_p = -0.118 - 0.118 - 0 = -0.236 \text{ cm}^3/\text{s}$$

Di volume kontrol 1, koefisien-koefisien persamaan diskret transpor difusif adalah

$$a_w = 0$$

$$a_e = \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}} = \frac{0.835 \times \pi/4 \times 0.6^2}{2} = 0.118 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$R_p = \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} = \frac{0.835 \times \pi/4 \times 0.6^2}{1} = 0.236 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$a_p = -a_w - a_e - R_p = -0 - 0.118 - 0.236 = -0.354 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$R_u = -\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \phi_w = -\frac{0.835 \times \pi/4 \times 0.6^2}{1} \times 100 = -23.6^\circ\text{C cm}^3/\text{s}$$

Di volume kontrol 5, koefisien-koefisien persamaan diskret transpor difusif adalah

$$a_w = \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} = \frac{0.835 \times \pi/4 \times 0.6^2}{2} = 0.118 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$a_e = 0$$

$$R_p = \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{pe}} = \frac{0.835 \times \pi/4 \times 0.6^2}{1} = 0.236 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$a_p = -a_w - a_e - R_p = -0.118 - 0 - 0.236 = -0.354 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$R_u = -\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{pe}} \phi_e = -\frac{0.835 \times \pi/4 \times 0.6^2}{1} \times 50 = -11.8^\circ\text{C cm}^3/\text{s}$$

Tampak bahwa cara ini menghasilkan persamaan diskret transpor difusif di lima volume kontrol yang sama dengan cara yang dipaparkan di bagian awal seksi ini, yaitu

$$\begin{aligned} cv \ 1: & -0.354\phi_1 + 0.118\phi_2 = -23.6 \\ cv \ 2: & 0.118\phi_1 - 0.236\phi_2 + 0.118\phi_3 = 0 \\ cv \ 3: & 0.118\phi_2 - 0.236\phi_3 + 0.118\phi_4 = 0 \\ cv \ 4: & 0.118\phi_3 - 0.236\phi_4 + 0.118\phi_5 = 0 \\ cv \ 5: & 0.118\phi_4 - 0.354\phi_5 = -11.8 \end{aligned}$$

4 Penyelesaian Persamaan Diskret Transpor Difusif

Sistem persamaan linear yang terdiri dari lima persamaan yang diperoleh dari langkah diskretisasi domain dan diskretisasi persamaan transpor difusif dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} -0.354 & 0.118 & 0 & 0 & 0 \\ 0.118 & -0.236 & 0.118 & 0 & 0 \\ 0 & 0.118 & -0.236 & 0.118 & 0 \\ 0 & 0 & 0.118 & -0.236 & 0.118 \\ 0 & 0 & 0 & 0.118 & -0.354 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -23.6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -11.8 \end{Bmatrix}$$

$$[A]\{\Phi\} = \{R\}$$

$[A]$ adalah matriks bujur sangkar yang elemennya adalah koefisien suku-suku persamaan diskret transpor difusif, $\{\Phi\}$ adalah vektor kolom yang elemennya adalah variabel ϕ , dan $\{R\}$ adalah vektor kolom yang elemennya adalah konstanta yang diketahui.

$[A]$ adalah matriks diagonal yang memiliki lebar (*bandwidth*) tiga. Jika dimensi matriks besar, maka penyelesaian persamaan di atas lazim dilakukan dengan algoritma matriks tridagonal (*tri-diagonal matrix algorithm*, TDMA). Jika dimensi matriks kecil, maka penyelesaian persamaan di atas dapat dilakukan dengan cara langsung. Misalnya, penyelesaian cara inversi matriks atau cara iterasi. Dalam MSeExcel, ada sejumlah fungsi untuk melakukan operasi matriks. Misalnya, fungsi untuk menghitung determinan, fungsi untuk mencari inversi matriks, dan fungsi untuk melakukan perkalian matriks. Perkalian inversi $[A]$ dengan vektor kolom di sebelah kiri dan sebelah kanan tanda kesamaan menghasilkan persamaan

$$[A]^{-1}[A]\{\Phi\} = [A]^{-1}\{R\}$$

$$\Rightarrow \{\Phi\} = [A]^{-1}\{R\}$$

Paragraf-paragraf di bawah ini memaparkan langkah penyelesaian persamaan di atas dengan bantuan MSeExcel.

1. Elemen-elemen $[A]$ dituliskan dalam sel B9:F13 dan elemen-elemen $\{R\}$ dituliskan dalam sel H9:H13.

2. Elemen-elemen $[A]^{-1}$ dihitung dan disimpan dalam sel B15:F19 dengan langkah

- pilih sel B15:F19;
- tuliskan fungsi untuk menghitung inversi matriks, =MINVERSE(B9:F13);
- tekan tombol CNTRL+SHIFT+ENTER bersama-sama;
- sel B15:F19 akan berisi $[A]^{-1}$

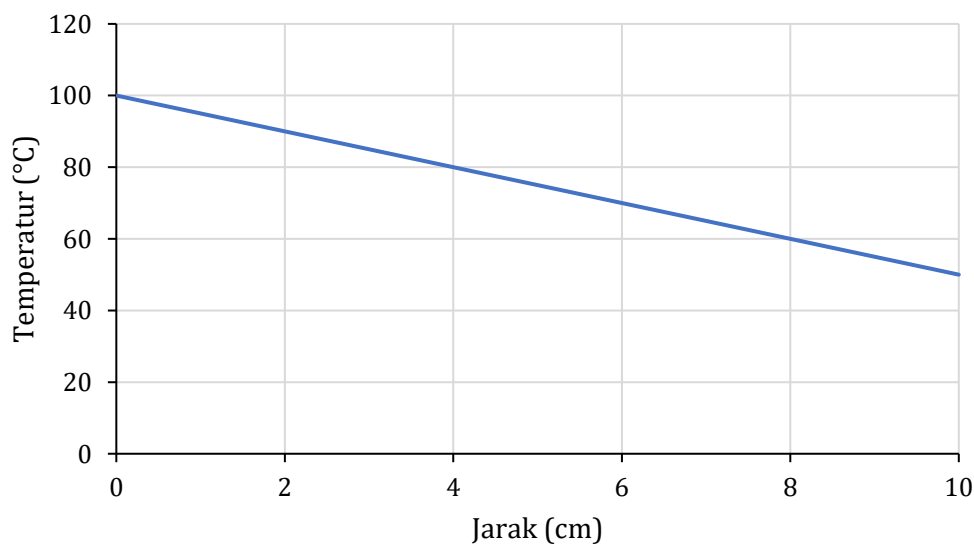
-3.812	-2.965	-2.118	-1.271	-0.424
-2.965	-8.895	-6.353	-3.812	-1.271
-2.118	-6.353	-10.589	-6.353	-2.118
-1.271	-3.812	-6.353	-8.895	-2.965
-0.424	-1.271	-2.118	-2.965	-3.812

3. Vektor kolom $\{R\}$ dihitung dengan memakai fungsi yang telah disediakan MSEExcel dan disimpan dalam sel H15:H19 dengan langkah sebagai berikut

- pilih sel H15:H19;
- tuliskan fungsi untuk menghitung perkalian dua matriks
=MMULT(B15:F19,H9:H13);
- tekan tombol CNTRL+SHIFT+ENTER bersama-sama;
- sel H15:H19 akan berisi $\{\Phi\}$

95
85
75
65
55

Gambar 3.8 menampilkan profil temperatur batang yang diperoleh dari penyelesaian numerik persamaan transpor difusif dengan metode volume hingga.



Gambar 3.8 Profil temperatur batang yang diperoleh dari penyelesaian numerik persamaan transpor difusif dengan metode volume hingga

Penyelesaian sistem persamaan linear di kelima volume kontrol dapat pula dilakukan dengan cara iterasi. Untuk memfasilitasi iterasi, maka persamaan diskret transpor difusif dituliskan dalam bentuk

$$\phi_i^{n+1} = \frac{R_{ui} - a_{wi}[\lambda\phi_{i-1}^{n+1} + (1-\lambda)\phi_{i-1}^n] - a_{ei}\phi_{i+1}^n}{a_{pi}}$$

Dalam persamaan di atas, i merujuk kepada nomor volume kontrol ($i = 1, 2, \dots, 5$), n merujuk kepada urutan iterasi, dan λ adalah konstanta. Nilai konstanta ini adalah $\lambda = 0$ untuk iterasi Jacobi, $\lambda = 1$ untuk iterasi Gauss-Seidel, atau $1 < \lambda < 2$ untuk iterasi *successive over relaxation* (SOR). Persamaan diskret transpor difusif di kelima volume kontrol yang siap untuk diselesaikan dengan cara iterasi adalah

$$\begin{aligned}\phi_1^{n+1} &= \frac{R_{u1} - a_{E1}\phi_2^n}{a_{P1}} \\ \phi_2^{n+1} &= \frac{R_{u2} - a_{W2}[\lambda\phi_1^{n+1} + (1-\lambda)\phi_1^n] - a_{E2}\phi_3^n}{a_{P2}} \\ \phi_3^{n+1} &= \frac{R_{u3} - a_{W3}[\lambda\phi_2^{n+1} + (1-\lambda)\phi_2^n] - a_{E3}\phi_4^n}{a_{P3}} \\ \phi_4^{n+1} &= \frac{R_{u4} - a_{W4}[\lambda\phi_3^{n+1} + (1-\lambda)\phi_3^n] - a_{E4}\phi_5^n}{a_{P4}} \\ \phi_5^{n+1} &= \frac{R_{u5} - a_{W5}[\lambda\phi_4^{n+1} + (1-\lambda)\phi_4^n]}{a_{P5}}\end{aligned}$$

Tabel 3.1 di bawah ini menunjukkan angka-angka hitungan iterasi cara SOR dengan $\lambda = 1.3$ untuk menyelesaikan persamaan di atas. Hitungan iterasi konvergen setelah 17 langkah iterasi. Hasil hitungan dengan cara iterasi tidak berbeda dengan hasil hitungan dengan cara perkalian matriks.

Tabel 3.1 Hitungan iterasi cara *successive over relaxation* dengan $\lambda = 1.3$ untuk mendapatkan temperatur di sepanjang batang

n	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	$\Delta\phi_{\text{maks}}$
0	0	0	0	0	0	---
1	66.667	43.333	28.167	18.308	41.267	66.66666667
2	81.111	56.806	39.578	42.134	49.761	23.82569444
3	85.602	63.263	53.667	53.827	52.445	14.08962963
$\vdots$						
15	95.000	85.001	75.001	65.001	55.000	0.00067444
16	95.000	85.001	75.001	65.000	55.000	0.000505504
17	95.000	85.000	75.000	65.000	55.000	0.000337006

Catatan: ϕ dalam satuan $^{\circ}\text{C}$.

3.2 Transpor Konvektif-Difusif

3.2.1 Persamaan Transpor Konvektif-Difusif 1D

Bentuk umum persamaan tranpor konvektif-difusif suatu besaran skalar ϕ dalam bidang satu dimensi adalah

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} = R$$

Dalam persamaan di atas, u adalah kecepatan aliran. Perhatikan perbedaan antara persamaan transpor konvektif-difusif di atas dan persamaan transpor difusif. Dalam medium diam, tidak ada aliran, kecepatan aliran nol, $u = 0$, persamaan di atas berubah menjadi persamaan transpor difusif

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} = R$$

Aliran harus memenuhi hukum konservasi (kekekalan) massa, atau yang lebih dikenal sebagai persamaan kontinuitas. Persamaan konservasi massa aliran adalah

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Ketika transpor telah mencapai permanen (*steady state*), yaitu ketika transpor tidak bergantung kepada waktu, maka $\partial \phi / \partial t = 0$. Persamaan transpor konvektif-difusif ketika transpor telah mencapai permanen menjadi

$$\frac{du \phi}{dx} - \frac{d}{dx} \Gamma \frac{d\phi}{dx} = R$$

dan persamaan konservasi massa aliran menjadi

$$\frac{du}{dx} = 0$$

Perhatikan bahwa kecepatan aliran, u , dan besaran skalar, ϕ , merupakan fungsi spasial (jarak), x , saja dan tidak lagi bergantung kepada waktu, t . Oleh karena itu, suku diferensial parsial berubah menjadi suku diferensial biasa.

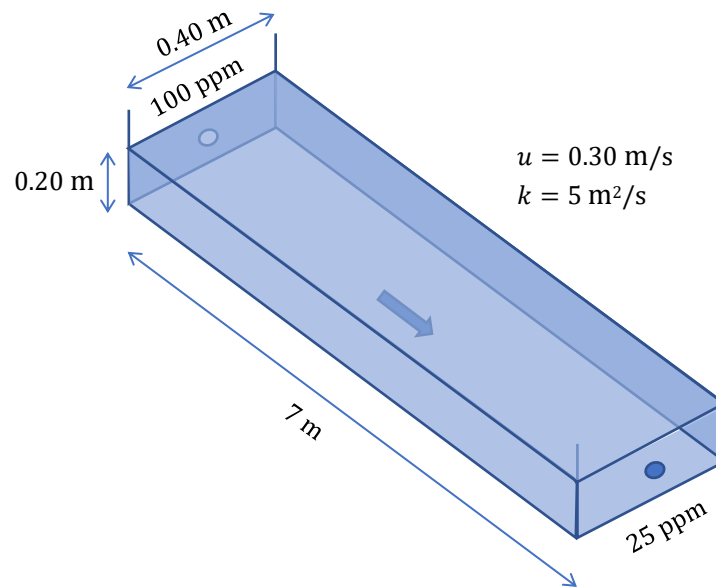
Metode volume hingga untuk menyelesaikan persamaan transpor konvektif-difusif permanen satu dimensi di atas mengenal lima skema, yaitu *central difference scheme*, *upwind difference scheme*, *hybrid difference scheme*, *power-law scheme*, dan *QUICK scheme*. Subbab 3.2.2 s.d. 3.2.6 memaparkan lima skema itu dan Subbab 3.2.7 menampilkan perbandingan hasil hitung contoh kasus yang diselesaikan memakai lima skema itu.

3.2.2 Central Difference Scheme

Penerapan metode volume hingga untuk menyelesaikan persamaan transpor konvektif-difusif permanen satu dimensi dipaparkan melalui contoh kasus di bawah ini.

Gambar 3.9 mengilustrasikan sebuah saluran laboratorium (*flume*) bertampang segi empat yang dialiri air dengan kecepatan aliran konstan 0.30 m/s. Panjang saluran 7 m, lebar saluran 0.40 m, dan kedalaman aliran 0.20 m. Air di pangkal saluran diberi polutan yang memiliki konsentrasi konstan 100 ppm. Dari pengukuran, konsentrasi polutan di ujung saluran adalah 25 ppm. Konsentrasi polutan ini konstan. Koefisien difusi polutan dalam air adalah 5 m²/s. Konsentrasi polutan di sepanjang saluran bervariasi dan dapat dihitung dengan penyelesaian persamaan transpor konvektif-difusif.

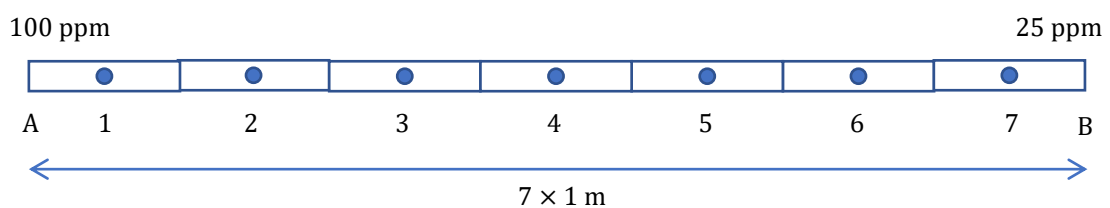
Sama dengan contoh kasus difusi permanen satu dimensi, *coding* dan hitungan dilakukan dengan bantuan *spreadsheet*. Paragraf-paragraf berikut ini memaparkan langkah hitungan konsentrasi polutan di sepanjang saluran dengan metode volume hingga.



Gambar 3.9 Ilustrasi transpor polutan dalam aliran di saluran laboratorium

1 Diskretisasi domain hitung

Sama seperti contoh kasus difusi permanen satu dimensi, domain model, dalam hal ini saluran laboratorium, dibagi menjadi sejumlah volume kontrol (*control volume*) diskret, atau sering pula disebut dengan sel. Volume kontrol di dekat batas domain model diletakkan sedemikian sehingga sisi volume kontrol berimpit dengan batas domain. Titik hitung (*node*) adalah titik tengah volume kontrol. Dalam kasus transpor konvektif-difusif dalam saluran laboratorium ini, domain model dibagi menjadi tujuh volume kontrol berukuran seragam, panjang satu meter. Gambar 3.10 menunjukkan ketujuh volume kontrol ini.



Gambar 3.10 Diskretisasi domain hitung transpor konvektif-difusif menjadi 7 volume kontrol berukuran seragam, panjang 1 meter

2 Diskretisasi persamaan transpor konvektif-difusif

Integrasi persamaan diferensial transpor konvektif-difusif untuk sebuah volume kontrol adalah

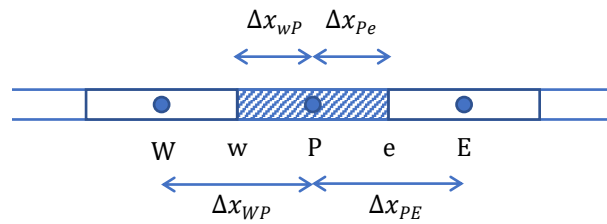
$$\iiint \frac{du\phi}{dx} dV - \iiint \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV = \iiint R dV$$

Integral volume suku konveksi dan difusi di sisi kiri tanda kesamaan berubah menjadi integral luasan tertutup yang menyelimuti volume kontrol dengan penerapan teorema divergensi Gauss.

$$\iint u \phi \vec{n} \cdot d\vec{S} - \iint \Gamma \frac{d\phi}{dx} \vec{n} \cdot d\vec{S} = \iiint R dV$$

Dalam persamaan di atas, $\vec{S}$ adalah vektor luas yang arahnya tegak lurus ke arah luar dari selimut volume kontrol. Untuk sebuah volume kontrol satu dimensi (Gambar 3.11), persamaan di atas berubah menjadi

$$[-(uS\phi)_w + (uS\phi)_e] - \left[-\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} S \right)_w + \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} S \right)_e \right] = \bar{R} \Delta V$$



Gambar 3.11 Sebuah volume kontrol transpor konvektif-difusif

Apabila suku-suku bertanda negatif ditempatkan setelah suku-suku bertanda positif, maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & [(uS\phi)_e - (uS\phi)_w] - \left[\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} S \right)_e - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} S \right)_w \right] = \bar{R} \Delta V \\ \Rightarrow & [u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e S_e - \Gamma_w \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w S_w \right] = \bar{R} \Delta V \end{aligned}$$

Dalam persamaan di atas, S adalah luas tampang sisi volume kontrol, ΔV adalah volume volume-kontrol, dan $\bar{R}$ adalah *source* rerata dalam volume kontrol. Titik hitung suatu volume kontrol diidentifikasi dengan simbol P yang memiliki volume kontrol tetangga di sisi kiri, W (*West*), dan sisi kanan, E (*East*). Bidang sisi-sisi volume kontrol diberi notasi w (*west*) di sisi kiri dan notasi e (*east*) di sisi kanan.

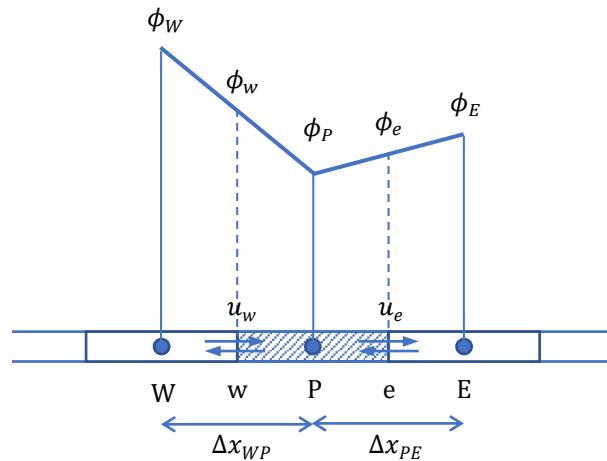
Dengan cara yang sama, integrasi persamaan kekekalan massa (persamaan kontinuitas) untuk sebuah volume kontrol satu dimensi adalah

$$\begin{aligned} -(uS)_w + (uS)_e &= 0 \\ \Rightarrow u_e S_e - u_w S_w &= 0 \end{aligned}$$

Tampak ada dua variabel yang perlu mendapatkan perhatian dalam persamaan diskret transpor konvektif-difusif dan persamaan diskret kontinuitas, yaitu u dan ϕ di sisi volume kontrol.

- Berkaitan dengan variabel kecepatan aliran u di sisi volume kontrol. Untuk saat ini, **kecepatan aliran di sisi volume kontrol dianggap diketahui**. Kenyataannya, kecepatan aliran merupakan variabel yang tidak diketahui (*unknown*).
- Berkaitan dengan variabel ϕ di sisi volume kontrol. Nilai ϕ di sisi volume kontrol perlu ditentukan dengan pendekatan berdasarkan nilai variabel ϕ di titik hitung volume kontrol. Untuk keperluan ini, dikenal berbagai skema pendekatan, antara lain **central difference, upwind difference, hybrid difference, power law**, dan **QUICK**. Dalam seksi (subbab) ini, nilai variabel ϕ di sisi volume kontrol dihitung dengan cara *central difference*. Subbab-subbab berikutnya akan membahas empat cara pendekatan yang lain.

Dalam pendekatan *central difference*, nilai variabel ϕ di sisi-sisi volume kontrol, ϕ_w dan ϕ_e , dihitung dengan cara interpolasi linear nilai-nilai variabel ϕ di dua titik hitung volume kontrol terdekat. Cara ini telah pula dipakai dalam kasus transpor difusif (Subbab 3.1.2) untuk menentukan nilai variabel Γ di sisi-sisi volume kontrol, Γ_w dan Γ_e . Gambar 3.12 mengilustrasikan *central difference scheme* dalam menghitung nilai variabel ϕ di sisi-sisi volume kontrol.



Gambar 3.12 *Central difference scheme* dalam menghitung nilai variabel ϕ di sisi-sisi volume kontrol

$$\phi_w = \frac{\Delta x_{wP} \phi_W + \Delta x_{Ww} \phi_P}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}}, \quad \phi_e = \frac{\Delta x_{eE} \phi_P + \Delta x_{Pe} \phi_E}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}}$$

Apabila **ukuran volume kontrol seragam**, maka koefisien difusi di sisi-sisi volume kontrol menjadi

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}, \quad \phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2}$$

Substitusi nilai-nilai di atas ke dalam persamaan transpor konvektif-difusif menghasilkan persamaan berikut.

$$[u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e S_e - \Gamma_w \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w S_w \right] = \bar{R} \Delta V$$

$$\Rightarrow \left[u_e S_e \left(\frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) - u_w S_w \left(\frac{\phi_W + \phi_P}{2} \right) \right] - \left[\Gamma_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) S_e - \Gamma_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) S_w \right] = \bar{R} \Delta V$$

Pengelompokan koefisien-koefisien variabel ϕ_W , ϕ_E , dan ϕ_P menghasilkan persamaan

$$\left(-\frac{u_w S_w}{2} - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_W + \left(-\frac{u_w S_w}{2} + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} + \frac{u_e S_e}{2} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_P + \left(\frac{u_e S_e}{2} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E = \bar{R} \Delta V$$

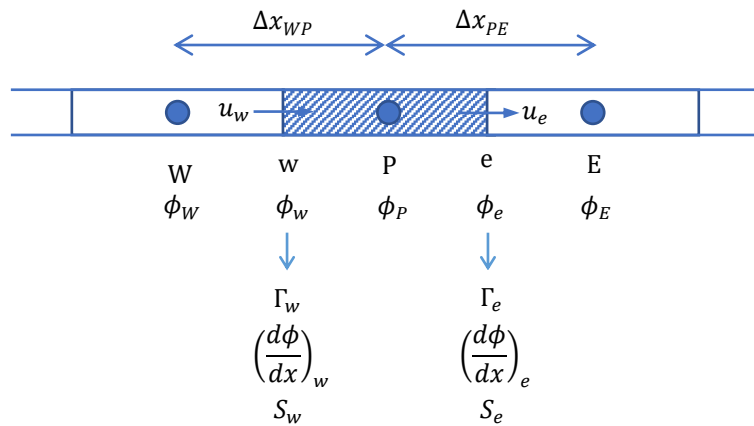
Persamaan di atas adalah persamaan diskret transpor konvektif-difusif di setiap volume kontrol. Untuk tujuh volume kontrol (Gambar 3.10), diperoleh tujuh persamaan. Nilai variabel ϕ di setiap volume kontrol (ϕ_P) merupakan fungsi nilai-nilai ϕ di dua volume kontrol tetangga, ϕ_W dan ϕ_E . Volume kontrol yang berada di pangkal dan ujung saluran, yaitu volume kontrol 1 dan 7, hanya memiliki satu tetangga. Salah satu sisi volume kontrol 1 dan 7 berimpit dengan batas domain hitung. Di batas domain, nilai ϕ diketahui. Nilai ini dikenal sebagai syarat batas (*boundary conditions*). Paragraf-paragraf di bawah ini memaparkan penyusunan ketujuh persamaan diskret transpor konvektif-difusif. Paparan berawal dari penyusunan persamaan diskret volume kontrol 2 s.d. 6 yang tidak berbatasan dengan domain hitung.

Volume kontrol 2 s.d. 6. Perhatikan Gambar 3.13. Dengan ukuran volume kontrol seragam, $\Delta x = 1$ m, luas tampang aliran 0.40×0.20 m², koefisien difusi seragam, $\Gamma = 5$ m²/s, kecepatan seragam, $u = 0.30$ m/s, tidak ada *source/sink*, $R = 0$, maka

$$u_w S_w = u_e S_e = 0.30 \times 0.40 \times 0.20 = 0.024 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} = \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} = \frac{5 \times 0.40 \times 0.20}{1} = 0.400 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\bar{R} \Delta V = 0$$



Gambar 3.13 Volume kontrol di domain hitung transpor konvektif-difusif

Perhatikan bahwa fluks massa konvektif di setiap volume kontrol selalu memenuhi kontinuitas massa, $u_e S_e - u_w S_w = 0$.

Nilai-nilai di atas disubstitusikan ke dalam persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 2 s.d. 6.

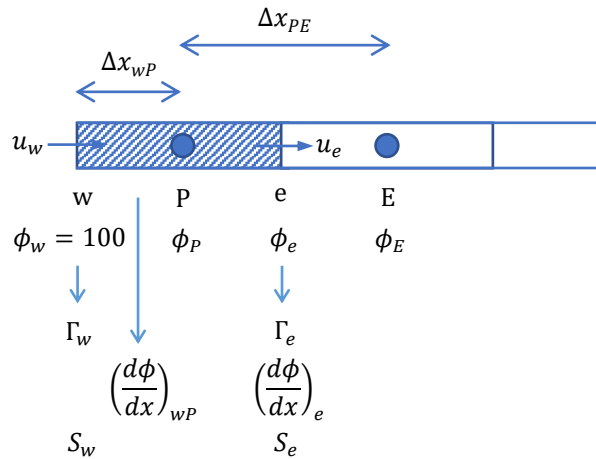
$$\begin{aligned} & \left(-\frac{u_w S_w}{2} - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_w + \left(-\frac{u_w S_w}{2} + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} + \frac{u_e S_e}{2} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_P + \left(\frac{u_e S_e}{2} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E = \bar{R} \Delta V \\ \Rightarrow & \left(-\frac{0.024}{2} - 0.400 \right) \phi_w + \left(-\frac{0.024}{2} + 0.400 + \frac{0.024}{2} + 0.400 \right) \phi_P + \left(\frac{0.024}{2} - 0.400 \right) \phi_E \\ & = 0 \\ \Rightarrow & (-0.412) \phi_w + (0.800) \phi_P + (-0.388) \phi_E = 0 \end{aligned}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 2 s.d. 6, dengan demikian, adalah

$$\begin{aligned} cv \ 2: & \quad -0.412 \phi_1 + 0.800 \phi_2 - 0.388 \phi_3 = 0 \\ cv \ 3: & \quad -0.412 \phi_2 + 0.800 \phi_3 - 0.388 \phi_4 = 0 \\ cv \ 4: & \quad -0.412 \phi_3 + 0.800 \phi_4 - 0.388 \phi_5 = 0 \\ cv \ 5: & \quad -0.412 \phi_4 + 0.800 \phi_5 - 0.388 \phi_6 = 0 \\ cv \ 6: & \quad -0.412 \phi_5 + 0.800 \phi_6 - 0.388 \phi_7 = 0 \end{aligned}$$

Volume kontrol 1. Gambar 3.14 menampilkan volume kontrol 1. Sisi kiri volume kontrol ini, w , berimpit dengan batas domain hitung. Di sebelah kiri (*West*), tidak ada volume kontrol tetangga. Volume kontrol W tidak ada. Di sebelah kanan, volume kontrol ini bertetangga dengan volume kontrol 2. Volume kontrol ini menjadi volume kontrol E . Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1 adalah

$$\begin{aligned} & [u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e S_e - \Gamma_w \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_{wP} S_w \right] = \bar{R} \Delta V \\ \Rightarrow & \left[u_e S_e \left(\frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) - u_w S_w (\phi_w) \right] - \left[\Gamma_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) S_e - \Gamma_w \left(\frac{\phi_P - \phi_w}{\Delta x_{WP}} \right) S_w \right] = \bar{R} \Delta V \end{aligned}$$



Gambar 3.14 Volume kontrol di batas kiri domain hitung transpor konvektif-difusif

Konsentrasi polutan di batas kiri domain hitung diketahui, $\phi_w = 100$ ppm. Di volume kontrol 1 tidak ada *source* mau pun *sink*, $R = 0$, sehingga $\bar{R} \Delta V = 0$. Persamaan di atas berubah menjadi

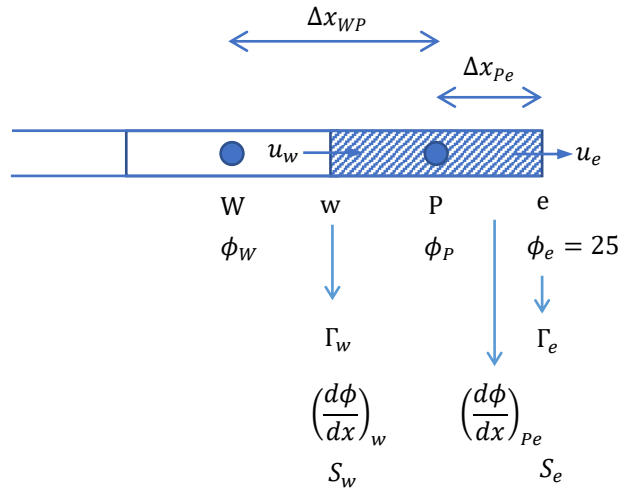
$$\begin{aligned}
 & \left[u_e S_e \left(\frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) - u_w S_w (100) \right] - \left[\Gamma_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) S_e - \Gamma_w \left(\frac{\phi_P - 100}{\Delta x_{WP}} \right) S_w \right] = 0 \\
 \Rightarrow & \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} + \frac{u_e S_e}{2} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_P + \left(\frac{u_e S_e}{2} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E = u_w S_w (100) + \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) 100 \\
 \Rightarrow & \left(\frac{5 \times 0.40 \times 0.20}{0.5} + \frac{0.024}{2} + 0.400 \right) \phi_P + \left(\frac{0.024}{2} - 0.400 \right) \phi_E \\
 & = 0.024 \times 100 + \frac{5 \times 0.40 \times 0.20}{0.5} \times 100 \\
 \Rightarrow & (1.212) \phi_P + (-0.388) \phi_E = 82.400
 \end{aligned}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1, dengan demikian, adalah

$$cv \ 1: \quad 1.212 \phi_1 - 0.388 \phi_2 = 82.400$$

Volume kontrol 7. Gambar 3.15 menampilkan volume kontrol 7. Di sebelah kiri, volume kontrol ini bertetangga dengan volume kontrol 6, yang menjadi volume kontrol W. Sisi kanan volume kontrol ini, e, berimpit dengan batas domain hitung. Di sebelah kanan (East), tidak ada volume kontrol tetangga. Volume kontrol E tidak ada. Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7 berbentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 & [u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e S_e - \Gamma_w \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w S_w \right] = \bar{R} \Delta V \\
 \Rightarrow & \left[u_e S_e \phi_e - u_w S_w \left(\frac{\phi_W + \phi_P}{2} \right) \right] - \left[\Gamma_e \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{PE}} \right) S_e - \Gamma_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) S_w \right] = \bar{R} \Delta V
 \end{aligned}$$



Gambar 3.15 Volume kontrol di batas kanan domain hitung transpor konvektif-difusif

Konsentrasi polutan di batas kanan domain hitung diketahui, $\phi_e = 25$ ppm. Di volume kontrol 7 tidak ada *source* mau pun *sink*, $R = 0$, sehingga $\bar{R} \Delta V = 0$. Persamaan di atas berubah menjadi

$$\begin{aligned}
 & \left[u_e S_e \times (25) - u_w S_w \left(\frac{\phi_w + \phi_p}{2} \right) \right] - \left[\Gamma_e \left(\frac{25 - \phi_p}{\Delta x_{pe}} \right) S_e - \Gamma_w \left(\frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta x_{wp}} \right) S_w \right] = 0 \\
 \Rightarrow & \left(-\frac{u_w S_w}{2} - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{wp}} \right) \phi_w + \left(-\frac{u_w S_w}{2} + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{wp}} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{pe}} \right) \phi_p = -u_e S_e (25) + \left(\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{pe}} \right) 25 \\
 \Rightarrow & \left(-\frac{0.024}{2} - 0.400 \right) \phi_w + \left(-\frac{0.024}{2} + 0.400 + \frac{5 \times 0.40 \times 0.20}{0.5} \right) \phi_p \\
 & = -0.024 \times 25 + \frac{5 \times 0.40 \times 0.20}{0.5} \times 25 \\
 \Rightarrow & (-0.412) \phi_w + (1.188) \phi_p = 19.400
 \end{aligned}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7, dengan demikian, adalah

$$cv \ 7: \quad -0.412 \phi_6 + 1.188 \phi_7 = 19.400$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di tujuh volume kontrol membentuk satu sistem persamaan linear.

$$\begin{aligned}
 cv \ 1: \quad & 1.212 \phi_1 - 0.388 \phi_2 = 82.400 \\
 cv \ 2: \quad & -0.412 \phi_1 + 0.800 \phi_2 - 0.388 \phi_3 = 0 \\
 cv \ 3: \quad & -0.412 \phi_2 + 0.800 \phi_3 - 0.388 \phi_4 = 0 \\
 cv \ 4: \quad & -0.412 \phi_3 + 0.800 \phi_4 - 0.388 \phi_5 = 0 \\
 cv \ 5: \quad & -0.412 \phi_4 + 0.800 \phi_5 - 0.388 \phi_6 = 0 \\
 cv \ 6: \quad & -0.412 \phi_5 + 0.800 \phi_6 - 0.388 \phi_7 = 0 \\
 cv \ 7: \quad & -0.412 \phi_6 + 1.188 \phi_7 = 19.400
 \end{aligned}$$

3 Cara kedua penyusunan persamaan diskret transpor konvektif-difusif

Langkah penyusunan persamaan diskret transpor konvektif-difusif yang dipaparkan di butir 2 mudah diikuti dan dipahami. Persamaan diskret yang dihasilkannya pun mudah dibaca dan dipahami. Namun, persamaan itu tidak efisien jika dituliskan dalam bahasa pemrograman komputer. Paragraf-paragraf berikut memaparkan langkah penyusunan persamaan diskret transpor konvektif-difusif yang menghasilkan persamaan diskret yang mudah untuk dituangkan dalam bahasa pemrograman komputer.

Variabel baru dikenalkan untuk menyingkat penulisan fluks massa menembus sisi sebuah volume kontrol, yaitu F dan D . Variabel F adalah fluks massa konvektif dan variabel D adalah fluks massa difusif menembus sisi volume kontrol.

$$F = u S$$

$$D = \frac{\Gamma S}{\Delta x}$$

Dengan memakai variabel F dan memakai *central difference scheme* untuk menghitung nilai ϕ di sisi-sisi volume kontrol, maka suku-suku konveksi dalam persamaan diskret transpor konvektif-difusif dapat dituliskan dalam bentuk

$$u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w = u_e S_e \left(\frac{\phi_p + \phi_e}{2} \right) - u_w S_w \left(\frac{\phi_w + \phi_p}{2} \right) = \frac{F_e}{2} (\phi_p + \phi_e) - \frac{F_w}{2} (\phi_w + \phi_p)$$

Dengan memakai definisi variabel D dan memakai cara beda tengah (*central difference*) untuk menghitung gradien ϕ di sisi volume kontrol, maka suku-suku difusi dalam persamaan transpor konvektif-difusif dapat dituliskan dalam bentuk

$$\Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e S_e = \Gamma_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) S_e = \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} (\phi_E - \phi_P) = D_e (\phi_E - \phi_P)$$
$$\Gamma_w \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w S_w = \Gamma_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) S_w = \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} (\phi_P - \phi_W) = D_w (\phi_P - \phi_W)$$

Suku *source* di sebelah kanan tanda kesamaan dihitung dengan pendekatan linearisasi, sama seperti yang diterapkan dalam menghitung suku *source* persamaan difusi, yaitu

$$\bar{R} \Delta V = R_u + R_p \phi_P$$

Dengan demikian, bentuk diskret persamaan transpor konvektif-difusif adalah

$$\left[\frac{F_e}{2} (\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2} (\phi_W + \phi_P) \right] - [D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)] = R_u + R_p \phi_P$$

dan bentuk diskret persamaan kontinuitas adalah

$$F_e - F_w = 0$$

Dengan pengelompokan koefisien, persamaan di atas menjadi

$$\left(-\frac{F_w}{2} - D_w \right) \phi_W + \left[\left(-\frac{F_w}{2} + D_w \right) + \left(\frac{F_e}{2} + D_e \right) - R_p \right] \phi_P + \left(\frac{F_e}{2} - D_e \right) \phi_E = R_u$$

Dengan sedikit manipulasi matematis, persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk

$$\left(-\frac{F_w}{2} - D_w \right) \phi_W + \left[\left(-F_w + \frac{F_w}{2} + D_w \right) + \left(F_e - \frac{F_e}{2} + D_e \right) - R_p \right] \phi_P + \left(\frac{F_e}{2} - D_e \right) \phi_E = R_u$$

yang dapat dituliskan menjadi

$$\left(-\frac{F_w}{2} - D_w \right) \phi_W + \left[-\left(-\frac{F_w}{2} - D_w \right) - \left(\frac{F_e}{2} - D_e \right) + F_e - F_w - R_p \right] \phi_P + \left(\frac{F_e}{2} - D_e \right) \phi_E = R_u$$

Apabila koefisien-koefisien suku ϕ_W , ϕ_E , dan ϕ_P dinamai a_W , a_E , dan a_P , maka persamaan di atas dapat dituliskan secara ringkas dalam bentuk

$$a_W \phi_W + a_P \phi_P + a_E \phi_E = R_u$$

Koefisien-koefisien dalam persamaan tersebut adalah

$$a_W = -\frac{F_w}{2} - D_w, \quad a_E = \frac{F_e}{2} - D_e, \quad \text{dan} \quad a_P = -a_W - a_E + F_e - F_w - R_p$$

Persamaan di atas adalah persamaan diskret transpor konvektif-difusif di setiap volume kontrol.

Volume kontrol 2 s.d. 6. Perhatikan Gambar 3.13. Dengan ukuran volume kontrol seragam, $\Delta x = 1$ m, luas sisi volume kontrol seragam, $S = 0.40 \times 0.20 = 0.08$ m², koefisien difusi seragam, $\Gamma = 5$ m²/s, kecepatan seragam, $u = 0.30$ m/s, maka

$$F_w = F_e = u S = 0.30 \times 0.08 = 0.024 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$D_w = D_e = \frac{\Gamma S}{\Delta x} = \frac{5 \times 0.08}{1} = 0.400 \text{ m}^3/\text{s}$$

Perhatikan bahwa fluks massa konvektif di setiap volume kontrol selalu memenuhi kontinuitas massa, $F_e - F_w = 0$.

Koefisien-koefisien dalam persamaan diskret transpor konvektif-difusif adalah

$$a_w = -\frac{F_w}{2} - D_w = -\frac{0.024}{2} - 0.400 = -0.412 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_E = \frac{F_E}{2} - D_e = \frac{0.024}{2} - 0.400 = -0.388 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_P = -a_w - a_E + F_e - F_w - R_P = 0.412 + 0.388 + 0.024 - 0.024 - 0 = 0.800 \text{ m}^3/\text{s}$$

Perlu dicatat bahwa dalam kasus ini tidak ada *source*, sehingga $R_u = 0$ dan $R_P = 0$.

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 2 s.d. 6, dengan demikian, adalah

$$\text{cv 2 s.d. 6: } (-0.412)\phi_w + (0.800)\phi_P + (-0.388)\phi_E = 0$$

Volume kontrol 1. Gambar 3.14 menampilkan volume kontrol 1. Sisi kiri volume kontrol ini, w , berimpit dengan batas domain hitung. Di sebelah kiri (*West*), tidak ada volume kontrol tetangga, sehingga koefisien a_w tidak ada. Di sebelah kanan, volume kontrol ini bertetangga dengan volume kontrol 2. Koefisien a_E dihitung seperti hitungan volume kontrol 2, 3, 4, 5, atau 6. Koefisien a_P dan suku *source*, $R_u + R_P\phi_P$ dihitung dengan cara berbeda dari cara sebelumnya di volume kontrol 2, 3, 4, 5, dan 6. Suku *source* sama dengan nol karena tidak ada *source*, $\bar{R}\Delta V = 0$. Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1 adalah

$$\begin{aligned} & [u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e S_e - \Gamma_w \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w S_w \right] = \bar{R}\Delta V \\ \Rightarrow & \left[u_e S_e \left(\frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) - u_w S_w \phi_w \right] - \left[\Gamma_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \right) S_e - \Gamma_w \left(\frac{\phi_P - \phi_w}{\Delta x/2} \right) S_w \right] = 0 \\ \Rightarrow & \left[\frac{u_e S_e}{2} (\phi_P + \phi_E) - u_w S_w \phi_w \right] - \left[\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x} (\phi_E - \phi_P) S_e - \frac{2\Gamma_w S_w}{\Delta x} (\phi_P - \phi_w) \right] = 0 \\ \Rightarrow & \left[\frac{F_e}{2} (\phi_P + \phi_E) - F_w \phi_w \right] - [D_e (\phi_E - \phi_P) - 2D_w (\phi_P - \phi_w)] = 0 \end{aligned}$$

Dengan pengelompokan koefisien, persamaan di atas berubah menjadi

$$\left[\left(\frac{F_e}{2} + D_e \right) + 2D_w \right] \phi_P + \left(\frac{F_e}{2} - D_e \right) \phi_E = (F_w + 2D_w) \phi_w$$

atau dapat pula dituliskan dalam bentuk

$$\left[-\left(\frac{F_e}{2} - D_e \right) + F_e + 2D_w \right] \phi_P + \left(\frac{F_e}{2} - D_e \right) \phi_E = (F_w + 2D_w) \phi_w$$

Dalam hal ini, $\phi_w = \phi_A = 100 \text{ ppm}$.

$$a_W = 0$$

$$a_E = \frac{F_E}{2} - D_e = \frac{0.024}{2} - 0.400 = -0.388 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R_P = -2D_w = -2 \times 0.400 = -0.800 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_P = -a_E + F_e - R_P = 0.388 + 0.024 + 0.800 = 1.212 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R_u = (F_w + 2D_w)\phi_w = (0.024 + 2 \times 0.400) \times 100 = 82.400 \text{ ppm m}^3/\text{s}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1, dengan demikian, adalah

$$cv \ 1: \ (1.212)\phi_P + (-0.388)\phi_E = 82.400$$

Volume kontrol 7. Gambar 3.15 menampilkan volume kontrol 7. Di sebelah kiri, volume kontrol ini bertetangga dengan volume kontrol 6. Koefisien a_W dihitung seperti hitungan volume kontrol 2, 3, 4, 5, atau 6. Sisi kanan volume kontrol ini, e , berimpit dengan batas domain hitung. Di sebelah kanan (*East*), tidak ada volume kontrol tetangga, sehingga koefisien a_E tidak ada. Koefisien a_P dan suku *source*, $R_u + R_P\phi_P$, dihitung dengan cara yang mirip dengan cara sebelumnya di volume kontrol 1. Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7 berbentuk

$$[u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e S_e - \Gamma_w \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w S_w \right] = \bar{R} \Delta V$$

Dalam contoh kasus ini, tidak ada *source* sehingga suku di sebelah kanan tanda kesamaan adalah nol.

$$\begin{aligned} & \left[u_e S_e \phi_e - u_w S_w \left(\frac{\phi_W + \phi_P}{2} \right) \right] - \left[\Gamma_e \left(\frac{\phi_e - \phi_P}{\Delta x/2} \right) S_e - \Gamma_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \right) S_w \right] = 0 \\ \Rightarrow & \left[u_e S_e \phi_e - \frac{u_w S_w}{2} (\phi_W + \phi_P) \right] - \left[\frac{2\Gamma_e S_e}{\Delta x} (\phi_e - \phi_P) - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x} (\phi_P - \phi_W) \right] = 0 \\ \Rightarrow & \left[F_e \phi_e - \frac{F_w}{2} (\phi_W + \phi_P) \right] - [2D_e (\phi_e - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)] = 0 \end{aligned}$$

Dengan pengelompokan koefisien, persamaan di atas berubah menjadi

$$\left(-\frac{F_w}{2} - D_w \right) \phi_W + \left[\left(-\frac{F_w}{2} + D_w \right) + 2D_e \right] \phi_P = -(F_e - 2D_e) \phi_e$$

atau dapat pula dituliskan dalam bentuk

$$\left(-\frac{F_w}{2} - D_w \right) \phi_W + \left[-\left(-\frac{F_w}{2} - D_w \right) - F_w + 2D_e \right] \phi_P = -(F_e - 2D_e) \phi_e$$

Dalam hal ini, $\phi_e = \phi_B = 25 \text{ ppm}$.

$$a_W = -\frac{F_w}{2} - D_w = -\frac{0.024}{2} - 0.400 = -0.412 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_E = 0$$

$$R_P = -2D_e = -2 \times 0.400 = -0.800 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_p = -a_w - F_w - R_p = 0.412 - 0.024 + 0.800 = 1.188 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R_u = -(F_e - 2D_e)\phi_e = -(0.024 - 2 \times 0.400) \times 25 = 19.400 \text{ ppm m}^3/\text{s}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7, dengan demikian, adalah

$$cv \ 7: \quad (-0.412)\phi_w + (1.188)\phi_p = 19.400$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di tujuh volume kontrol membentuk satu sistem persamaan linear di bawah ini. Tampak bahwa cara yang dipaparkan di sini menghasilkan persamaan yang sama dengan persamaan yang dihasilkan dari penyusunan yang dipaparkan di butir 2.

$$\begin{aligned} cv \ 1: \quad & 1.212\phi_1 - 0.388\phi_2 = 82.400 \\ cv \ 2: \quad & -0.412\phi_1 + 0.800\phi_2 - 0.388\phi_3 = 0 \\ cv \ 3: \quad & -0.412\phi_2 + 0.800\phi_3 - 0.388\phi_4 = 0 \\ cv \ 4: \quad & -0.412\phi_3 + 0.800\phi_4 - 0.388\phi_5 = 0 \\ cv \ 5: \quad & -0.412\phi_4 + 0.800\phi_5 - 0.388\phi_6 = 0 \\ cv \ 6: \quad & -0.412\phi_5 + 0.800\phi_6 - 0.388\phi_7 = 0 \\ cv \ 7: \quad & -0.412\phi_6 + 1.188\phi_7 = 19.400 \end{aligned}$$

4 Penyelesaian persamaan diskret transpor konvektif-difusif

Seperti dalam kasus transpor difusif, ketujuh persamaan yang diperoleh dari penjabaran persamaan diskret transpor konvektif-difusif di setiap volume kontrol merupakan satu sistem persamaan linear. Sistem persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks

$$[A]\{\Phi\} = \{R\}$$

$[A]$ adalah matriks bujur sangkar yang elemennya adalah koefisien suku-suku persamaan diskret transpor konvektif-difusif, $\{\Phi\}$ adalah vektor kolom yang elemennya adalah variabel ϕ , dan $\{R\}$ adalah vektor kolom yang elemennya adalah konstanta yang diketahui.

$$\begin{bmatrix} a_{p1} & a_{E1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{w2} & a_{p2} & a_{E2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{w3} & a_{p3} & a_{E3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{w4} & a_{p4} & a_{E4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{w5} & a_{p5} & a_{E5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{w6} & a_{p6} & a_{E6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{w7} & a_{p7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{u1} \\ R_{u2} \\ R_{u3} \\ R_{u4} \\ R_{u5} \\ R_{u6} \\ R_{u7} \end{Bmatrix}$$

Substitusi nilai-nilai koefisien persamaan diskret konvektif-difusif ke dalam matriks di atas menghasilkan matriks

$$\begin{bmatrix} 1.212 & -0.388 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.412 & 0.800 & -0.388 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.412 & 0.800 & -0.388 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.412 & 0.800 & -0.388 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.412 & 0.800 & -0.388 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.412 & 0.800 & -0.388 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.412 & 1.188 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 82.400 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19.400 \end{Bmatrix}$$

[A] adalah matriks diagonal yang memiliki lebar (*bandwidth*) tiga. Jika dimensi matriks besar, maka penyelesaian persamaan di atas lazim dilakukan dengan algoritma matriks tri-diagonal (*tri-diagonal matrix algorithm*, TDMA). Jika dimensi matriks kecil, maka penyelesaian persamaan dapat dilakukan dengan cara langsung. Misalnya, penyelesaian dengan menggunakan inversi matriks atau menggunakan cara iterasi. MSExcel menyediakan sejumlah fungsi untuk melakukan operasi matriks. Misalnya, fungsi untuk menghitung determinan, fungsi untuk mencari inversi matriks, atau fungsi untuk melakukan perkalian matriks. Perkalian inversi [A] dengan vektor kolom di sebelah kiri dan di sebelah kanan tanda kesamaan menghasilkan persamaan

$$[A]^{-1}[A]\{\Phi\} = [A]^{-1}\{R\}$$

$$\Rightarrow \{\Phi\} = [A]^{-1}\{R\}$$

Paragraf-paragraf di bawah ini memaparkan langkah penyelesaian persamaan di atas dengan bantuan MSExcel.

1. Elemen-elemen [A] dituliskan dalam sel B14:H20 dan elemen-elemen {R} dituliskan dalam sel J14:J20.
2. Elemen-elemen $[A]^{-1}$ dicari dan disimpan dalam sel B22:H28 dengan langkah:
 - e) pilih sel B22:H28;
 - f) tuliskan fungsi untuk menghitung inversi matriks, =MINVERSE(B14:H20);
 - g) tekan tombol CNTRL+SHIFT+ENTER bersama-sama;
 - h) sel B22:F28 berisi $[A]^{-1}$

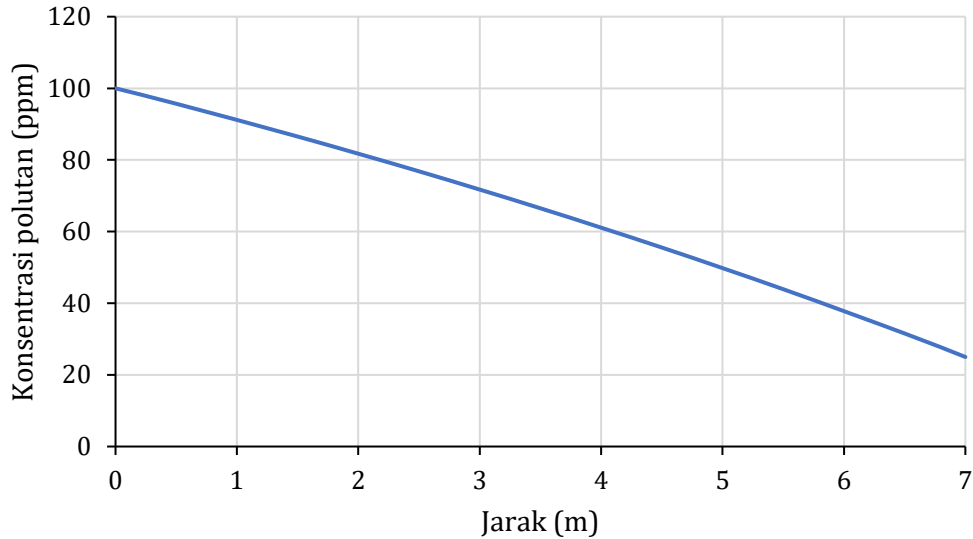
1.144	0.938	0.744	0.561	0.389	0.227	0.074
0.996	2.929	2.323	1.752	1.214	0.708	0.231
0.839	2.467	4.000	3.017	2.091	1.219	0.398
0.672	1.976	3.204	4.360	3.022	1.762	0.576
0.494	1.454	2.358	3.209	4.011	2.339	0.764
0.306	0.900	1.460	1.987	2.483	2.951	0.964
0.106	0.312	0.506	0.689	0.861	1.023	1.176

3. Vektor kolom {R} dihitung dengan memakai fungsi yang telah disediakan MSExcel dan disimpan dalam sel J22:J28 dengan langkah
 - e) pilih sel J22:J28;
 - f) tuliskan fungsi untuk menghitung perkalian dua matriks, =MMULT(B22:H28,J14:J20);
 - g) tekan tombol CNTRL+SHIFT+ENTER bersama-sama;
 - h) sel J22:J28 berisi {Φ}

95.69
86.54
76.82
66.50
55.55
43.91

31.56

Gambar 3.16 menampilkan profil konsentrasi polutan di saluran yang diperoleh dari penyelesaian numerik persamaan transpor konvektif-difusif dengan metode volume hingga.



Gambar 3.16 Profil konsentrasi polutan yang diperoleh dari penyelesaian numerik persamaan transpor konvektif-difusif dengan metode volume hingga

Penyelesaian sistem persamaan linear di ketujuh volume kontrol dapat pula dilakukan dengan cara iterasi. Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di kontrol volume dituliskan dalam bentuk

$$\phi_i^{n+1} = \frac{R_{ui} - a_{Wi}[\lambda\phi_{i-1}^{n+1} + (1-\lambda)\phi_{i-1}^n] - a_{Ei}\phi_{i+1}^n}{a_{Pi}}$$

Dalam persamaan di atas, i merujuk kepada nomor volume kontrol ($i = 1, 2, \dots, 7$), n merujuk kepada urutan iterasi, dan λ adalah konstanta. Nilai konstanta ini adalah $\lambda = 0$ untuk iterasi Jacobi, $\lambda = 1$ untuk iterasi Gauss-Seidel, atau $1 < \lambda < 2$ untuk iterasi *successive over relaxation* (SOR). Persamaan diskret di ketujuh volume kontrol yang siap untuk diselesaikan dengan cara iterasi adalah

$$\begin{aligned}\phi_1^{n+1} &= \frac{R_{u1} - a_{E1}\phi_2^n}{a_{P1}} \\ \phi_2^{n+1} &= \frac{R_{u2} - a_{W2}[\lambda\phi_1^{n+1} + (1-\lambda)\phi_1^n] - a_{E2}\phi_3^n}{a_{P2}} \\ \phi_3^{n+1} &= \frac{R_{u3} - a_{W3}[\lambda\phi_2^{n+1} + (1-\lambda)\phi_2^n] - a_{E3}\phi_4^n}{a_{P3}} \\ \phi_4^{n+1} &= \frac{R_{u4} - a_{W4}[\lambda\phi_3^{n+1} + (1-\lambda)\phi_3^n] - a_{E4}\phi_5^n}{a_{P4}} \\ \phi_5^{n+1} &= \frac{R_{u5} - a_{W5}[\lambda\phi_4^{n+1} + (1-\lambda)\phi_4^n] - a_{E5}\phi_6^n}{a_{P5}} \\ \phi_6^{n+1} &= \frac{R_{u6} - a_{W6}[\lambda\phi_5^{n+1} + (1-\lambda)\phi_5^n] - a_{E6}\phi_7^n}{a_{P6}} \\ \phi_7^{n+1} &= \frac{R_{u7} - a_{W7}[\lambda\phi_6^{n+1} + (1-\lambda)\phi_6^n]}{a_{P7}}\end{aligned}$$

Tabel 3.2 menunjukkan angka-angka hitungan iterasi cara SOR dengan $\lambda = 1.45$ untuk menyelesaikan persamaan di atas. Hitungan konvergen setelah 30 langkah iterasi.

Tabel 3.2 Hitungan iterasi cara *successive over relaxation* dengan $\lambda = 1.45$ untuk mendapatkan konsentrasi polutan di sepanjang saluran

n	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	$\Delta\phi_{\text{maks}}$
0	0	0	0	0	0			
1	67.987	50.769	37.912	28.311	21.141	15.787	24.269	67.98679868
2	84.240	65.537	50.905	39.481	30.578	29.705	28.804	16.25282761
3	88.967	71.603	57.429	45.918	39.547	36.415	30.006	8.968876903
$\vdots$								
28	95.691	86.540	76.822	66.504	55.547	43.913	31.559	5.79013E-05
29	95.691	86.540	76.822	66.504	55.547	43.913	31.559	2.55085E-05
30	95.691	86.540	76.822	66.504	55.547	43.913	31.559	8.89251E-06

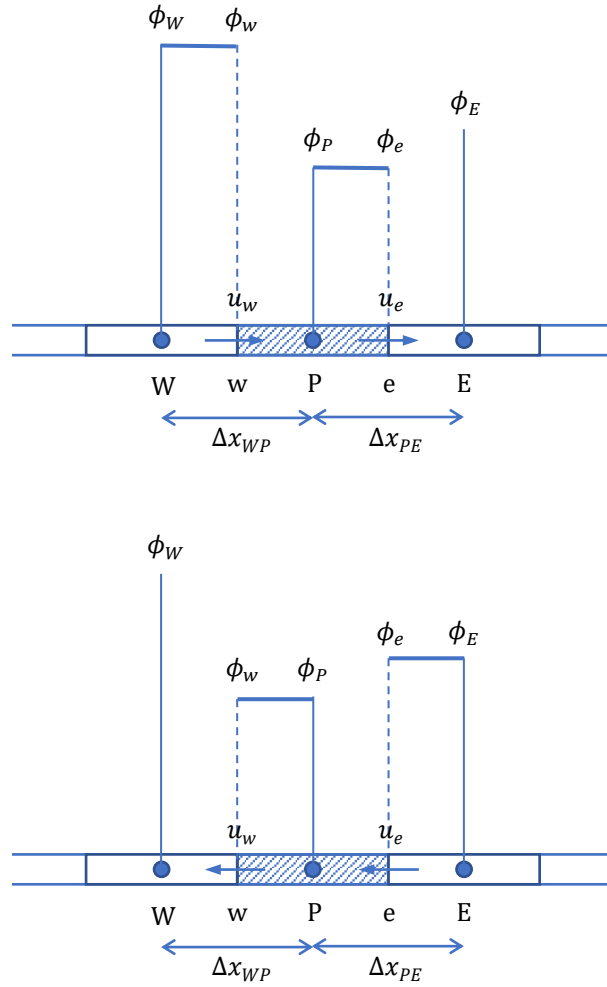
Catatan: ϕ dalam satuan ppm.

3.2.3 Upwind Difference Scheme

Central difference scheme memiliki kelemahan dalam hal ketidak-mampuannya “melihat” arah aliran. Nilai ϕ di sisi timur, misalnya, selalu merupakan fungsi (dipengaruhi) oleh nilai ϕ di titik hitung P dan E. Apabila transpor konvektif dominan (kecepatan aliran besar), maka nilai ϕ_e seharusnya dipengaruhi oleh nilai ϕ di salah satu volume kontrol, ϕ_P atau ϕ_E . Apabila arah aliran positif (dari P ke E), maka nilai ϕ_e merupakan fungsi ϕ_P . Sebaliknya, apabila arah aliran negatif (dari E ke P), maka nilai ϕ_e merupakan fungsi ϕ_E . Kelemahan *central difference* ini tidak dijumpai dalam *upwind difference*. Menurut skema ini, nilai ϕ di sisi-sisi volume kontrol adalah sama dengan nilai ϕ di volume kontrol hulu (tempat asal aliran). Gambar 3.17 menunjukkan secara skematis prinsip *upwind difference*.

Dalam *upwind difference scheme*, nilai ϕ_e dan ϕ_w ditetapkan dengan cara berikut.

$$\begin{aligned}\phi_w &= \begin{cases} \phi_W & \text{jika } u_w > 0, u_w S_w > 0 \\ \phi_P & \text{jika } u_w < 0, u_w S_w < 0 \end{cases} \\ \phi_e &= \begin{cases} \phi_P & \text{jika } u_e > 0, u_e S_e > 0 \\ \phi_E & \text{jika } u_e < 0, u_e S_e < 0 \end{cases}\end{aligned}$$



Gambar 3.17 *Upwind difference scheme* untuk arah aliran positif (gambar atas) dan untuk arah aliran negatif (gambar bawah)

Dengan menggunakan kriteria *upwind difference*, maka persamaan diskret transpor konvektif-difusif menjadi

$$\begin{aligned}
 & [u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e S_e - \Gamma_w \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w S_w \right] = \bar{R} \Delta V \\
 \Rightarrow & [u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\Gamma_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) S_e - \Gamma_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) S_w \right] = \bar{R} \Delta V \\
 \Rightarrow & [u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} (\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} (\phi_P - \phi_W) \right] = \bar{R} \Delta V
 \end{aligned}$$

Nilai ϕ_e bergantung pada arah aliran fluks massa $u_e S_e$ dan nilai ϕ_w bergantung pada arah fluks massa $u_w S_w$.

Paragraf-paragraf di bawah ini memaparkan penerapan persamaan diskret transpor konvektif-difusif skema *upwind difference* dalam kasus transpor polutan di saluran laboratorium. Mirip dengan cara diskretisasi persamaan transpor konvektif-difusif untuk skema *central difference*, cara diskretisasi persamaan diskret ini pun dilakukan menurut dua cara.

1 Cara pertama diskretisasi persamaan transpor konvektif-difusif skema *upwind difference*

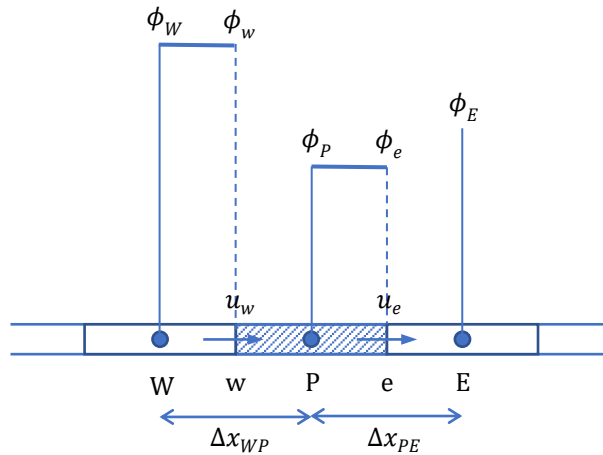
Cara pertama diskretisasi persamaan transpor konvektif-difusif skema *upwind difference* dipaparkan mengacu pada kasus transpor polutan di *flume*. Cara diskretisasi ini mudah untuk diikuti, walau bentuk persamaan yang dihasilkannya menjadi panjang.

Volume kontrol 2 s.d. 6. Persamaan transpor konvektif-difusif di volume kontrol 2 s.d. 6 adalah

$$[u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} (\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} (\phi_P - \phi_W) \right] = \bar{R} \Delta V$$

Perhatikan Gambar 3.18. Aliran adalah dari W ke P dan dari P ke E. Dengan demikian, $\phi_w = \phi_W$ dan $\phi_e = \phi_P$. Persamaan di atas menjadi

$$[u_e S_e \phi_P - u_w S_w \phi_W] - \left[\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} (\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} (\phi_P - \phi_W) \right] = \bar{R} \Delta V$$



Gambar 3.18 Volume kontrol di domain hitung transpor konvektif-difusif skema *upwind difference*, arah aliran positif

Pengelompokan koefisien-koefisien variabel ϕ_W , ϕ_E , dan ϕ_P menghasilkan persamaan

$$\left(-u_w S_w - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_W + \left(u_e S_e + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_P + \left(-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E = \bar{R} \Delta V$$

Koefisien-koefisien ϕ_W , ϕ_P , dan ϕ_E dalam persamaan di atas adalah

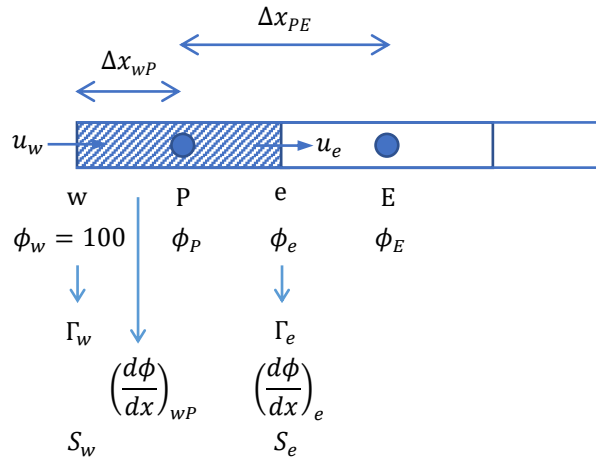
$$\begin{aligned} -u_w S_w - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} &= -0.30 \times 0.08 - \frac{5 \times 0.08}{1} = -0.424 \text{ m}^3/\text{s} \\ u_e S_e + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} &= 0.30 \times 0.08 + \frac{5 \times 0.08}{1} + \frac{5 \times 0.08}{1} = 0.824 \text{ m}^3/\text{s} \\ -\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} &= -\frac{5 \times 0.08}{1} = -0.400 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Dalam kasus ini tidak ada *source* atau *sink*, $\bar{R} = 0$, sehingga $\bar{R} \Delta V = 0$.

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 2 s.d. 6, dengan demikian, adalah

$$cv \ 2 \ s.d. \ 6: \ (-0.424)\phi_w + (0.824)\phi_P + (-0.400)\phi_E = 0$$

Volume kontrol 1. Sisi kiri volume kontrol ini berimpit dengan batas domain hitung. Untuk membantu pemahaman terhadap penjabaran persamaan diskret di volume kontrol 1, maka Gambar 3.14 ditampilkan kembali dalam Gambar 3.19.



Gambar 3.19 Volume kontrol di batas kiri domain hitung transpor konvektif-difusif

Aliran adalah dari w ke P dan dari P ke E. Dengan demikian, $\phi_w = 100$ dan $\phi_e = \phi_P$. Di volume kontrol ini tidak ada *source* atau *sink*, $\bar{R} = 0$, sehingga $\bar{R}\Delta V = 0$. Persamaan transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1 menjadi

$$[u_e S_e \phi_P - u_w S_w \times 100] - \left[\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} (\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{wP}} (\phi_P - 100) \right] = 0$$

Pengelompokan koefisien-koefisien variabel ϕ_E dan ϕ_P menghasilkan persamaan

$$\left(u_e S_e + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{wP}} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_P + \left(-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E = \left(u_w S_w + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{wP}} \right) \times 100$$

Koefisien-koefisien ϕ_P dan ϕ_E dalam persamaan di atas adalah

$$u_e S_e + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{wP}} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} = 0.30 \times 0.08 + \frac{5 \times 0.08}{1/2} + \frac{5 \times 0.08}{1} = 1.224 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} = -\frac{5 \times 0.08}{1} = -0.400 \text{ m}^3/\text{s}$$

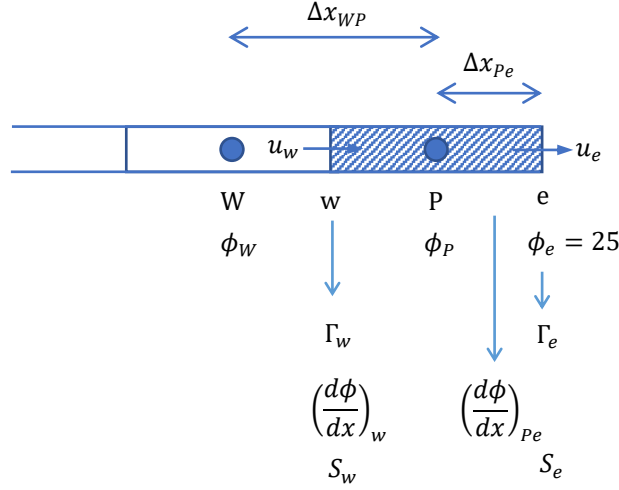
Konstanta di sisi kanan tanda kesamaan adalah

$$\left(u_w S_w + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{wP}} \right) \times 100 = \left(0.30 \times 0.08 + \frac{5 \times 0.08}{1/2} \right) \times 100 = 82.400 \text{ ppm m}^3/\text{s}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1, dengan demikian, adalah

$$cv \ 1: \ (1.224)\phi_P + (-0.400)\phi_E = 82.400$$

Volume kontrol 7. Sisi kanan volume kontrol ini berimpit dengan batas domain hitung. Untuk memudahkan pemahaman terhadap penjabaran persamaan diskret di volume kontrol 7, maka Gambar 3.15 ditampilkan kembali dalam Gambar 3.20.



Gambar 3.20 Volume kontrol di batas kanan domain hitung transpor konvektif-difusif

Arah aliran adalah dari W ke P dan dari P ke e. Konsentrasi polutan di sisi e diketahui, $\phi_e = 25$ ppm. Di volume kontrol ini tidak ada *source* atau *sink*, $\bar{R} = 0$, sehingga $\bar{R}\Delta V = 0$. Persamaan transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7 menjadi

$$[u_e S_e \times 25 - u_w S_w \phi_W] - \left[\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}} (25 - \phi_P) - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} (\phi_P - \phi_W) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(-u_w S_w - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x} \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x/2} + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x} \right) \phi_P = \left(-u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x/2} \right) \times 25$$

Koefisien-koefisien ϕ_W dan ϕ_P dalam persamaan di atas adalah

$$-u_w S_w - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x} = -0.30 \times 0.08 - \frac{5 \times 0.08}{1} = -0.424 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x/2} + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x} = \frac{5 \times 0.08}{1/2} + \frac{5 \times 0.08}{1} = 1.200 \text{ m}^3/\text{s}$$

Konstanta di sisi kanan tanda kesamaan adalah

$$\left(-u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x/2} \right) \times 25 = \left(-0.30 \times 0.08 + \frac{5 \times 0.08}{1/2} \right) \times 25 = 19.400 \text{ ppm m}^3/\text{s}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7, dengan demikian, adalah

$$cv \ 7: \quad (-0.424)\phi_W + (1.200)\phi_P = 19.400$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di tujuh volume kontrol membentuk satu sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{aligned}
 cv\ 1: & \quad 1.224\phi_1 - 0.400\phi_2 = 82.400 \\
 cv\ 2: & \quad -0.424\phi_1 + 0.824\phi_2 - 0.400\phi_3 = 0 \\
 cv\ 3: & \quad -0.424\phi_2 + 0.824\phi_3 - 0.400\phi_4 = 0 \\
 cv\ 4: & \quad -0.424\phi_3 + 0.824\phi_4 - 0.400\phi_5 = 0 \\
 cv\ 5: & \quad -0.424\phi_4 + 0.824\phi_5 - 0.400\phi_6 = 0 \\
 cv\ 6: & \quad -0.424\phi_5 + 0.824\phi_6 - 0.400\phi_7 = 0 \\
 cv\ 7: & \quad -0.424\phi_6 + 1.200\phi_7 = 19.400
 \end{aligned}$$

2 Cara kedua diskretisasi persamaan transpor konvektif-difusif skema *upwind difference*

Cara penjabaran persamaan diskret transpor konvektif-difusif seperti dipaparkan dalam butir 1 di atas mudah untuk diikuti dan dipahami. Namun, cara itu tidak praktis apabila jumlah persamaan banyak dan cara itu tidak menghasilkan persamaan yang mudah untuk dituangkan dalam program komputer. Paragraf-paragraf berikut memaparkan cara untuk mendapatkan persamaan diskret transpor konvektif-difusif yang mudah untuk dituangkan dalam program komputer.

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di suatu volume kontrol interior adalah

$$\begin{aligned}
 & [u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e S_e - \Gamma_w \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w S_w \right] = \bar{R} \Delta V \\
 \Rightarrow & [u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} (\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} (\phi_P - \phi_W) \right] = \bar{R} \Delta V \\
 \Rightarrow & [F_e \phi_e - F_w \phi_w] - [D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)] = \bar{R} \Delta V
 \end{aligned}$$

Dalam skema *upwind difference*, konsentrasi polutan di batas volume kontrol, ϕ_e dan ϕ_w , bergantung pada arah aliran (arah fluks). Variabel $\phi_e = \phi_P$ jika $F_e > 0$ dan $\phi_e = \phi_E$ jika $F_e < 0$. Nilai $\phi_w = \phi_W$ jika $F_w > 0$ dan $\phi_w = \phi_P$ jika $F_w < 0$. Ini dapat diimplementasikan ke persamaan diskret transpor konvektif-difusif di atas dengan mengubah bentuk persamaan itu menjadi

$$\begin{aligned}
 & [\{\max(F_e, 0) \phi_P - \max(-F_e, 0) \phi_E\} - \{\max(F_w, 0) \phi_W - \max(-F_w, 0) \phi_P\}] \\
 & - [D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)] = \bar{R} \Delta V
 \end{aligned}$$

Apabila suku *source/sink* dinyatakan dalam bentuk $R_u + R_P \phi_P$ dan menyubstitusikan bentuk ini ke persamaan di atas, maka

$$\begin{aligned}
 & [\{\max(F_e, 0) \phi_P - \max(-F_e, 0) \phi_E\} - \{\max(F_w, 0) \phi_W - \max(-F_w, 0) \phi_P\}] \\
 & - [D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)] = R_u + R_P \phi_P
 \end{aligned}$$

Dengan pengelompokan koefisien, maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned}
 & [-\max(F_w, 0) - D_w] \phi_W + [\max(-F_w, 0) + D_w + \max(F_e, 0) + D_e - R_P] \phi_P \\
 & + [-\max(-F_e, 0) - D_e] \phi_E = R_u
 \end{aligned}$$

Perhatikan koefisien transpor konvektif untuk ϕ_P dalam persamaan di atas. Fungsi $\max(-F_w, 0)$ dapat dituliskan dalam bentuk $\max(F_w, 0) - F_w$ dan fungsi $\max(F_e, 0)$ dapat dituliskan dalam bentuk $\max(-F_e, 0) + F_e$.

$$[-\max(F_w, 0) - D_w]\phi_w + \{[\max(F_w, 0) + D_w] - F_w + [\max(-F_e, 0) + D_e] + F_e - R_p\}\phi_p + [-\max(-F_e, 0) - D_e]\phi_E = R_u$$

Dengan cara itu, maka persamaan diskret transpor konvektif-difusif menurut *upwind difference scheme* dapat dituliskan dalam bentuk

$$a_w\phi_w + a_p\phi_p + a_E\phi_E = R_u$$

Dalam persamaan di atas, koefisien-koefisien a_w , a_E , dan a_p adalah

$$a_w = -\max(F_w, 0) - D_w$$

$$a_E = -\max(-F_e, 0) - D_e$$

$$a_p = -a_w - a_E + F_e - F_w - R_p$$

Paragraf-paragraf di bawah ini memaparkan penerapan persamaan diskret transpor konvektif-difusif *upwind difference scheme* dalam kasus transpor polutan di saluran laboratorium.

Volume kontrol 2 s.d. 6. Fluks konvektif dan fluks difusif telah dihitung di subbab yang membahas *central difference scheme*, yaitu

$$F_w = F_e = u S = 0.30 \times 0.08 = 0.024 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$D_w = D_e = \frac{\Gamma S}{\Delta x} = \frac{5 \times 0.08}{1} = 0.400 \text{ m}^3/\text{s}$$

Koefisien-koefisien persamaan diskret transpor konvektif-difusif adalah

$$a_w = -\max(F_w, 0) - D_w = -\max(0.024, 0) - 0.400 = -0.424 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_E = -\max(-F_e, 0) - D_e = -\max(-0.024, 0) - 0.400 = -0.400 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_p = -a_w - a_E + F_e - F_w - R_p = +0.424 + 0.400 + 0.024 - 0.024 - 0 = 0.824 \text{ m}^3/\text{s}$$

Perlu dicatat bahwa dalam kasus ini tidak ada *source*, sehingga $R_u = 0$ dan $R_p = 0$.

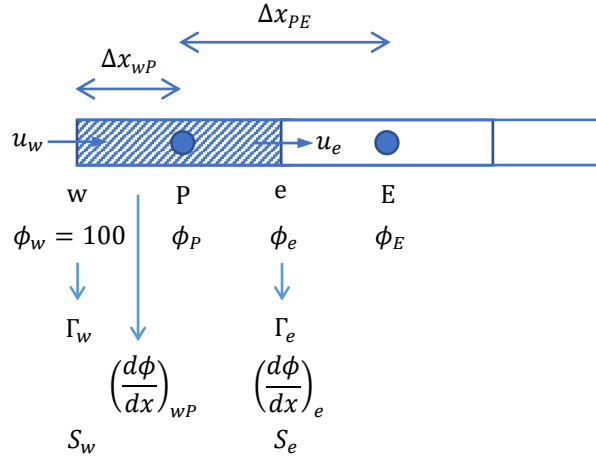
Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 2 s.d. 6, dengan demikian, adalah

$$cv \text{ 2 s.d. 6: } (-0.424)\phi_w + (0.824)\phi_p + (-0.400)\phi_E = 0$$

Volume kontrol 1. Sisi kiri volume kontrol ini berimpit dengan batas domain hitung. Untuk membantu pemahaman terhadap cara penjabaran persamaan diskret di volume kontrol 1, maka Gambar 3.14 ditampilkan kembali dalam Gambar 3.21. Suku a_p dan suku *source*, $R_u + R_p\phi_p$, dihitung dengan cara berbeda dari cara sebelumnya di volume kontrol 2, 3, 4, 5, dan 6. Suku *source* sama dengan nol karena tidak ada *source*, $\bar{R}\Delta V = 0$. Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1 adalah

$$[\max(F_e, 0)\phi_p - \max(-F_e, 0)\phi_E] - [F_w\phi_w] - \left[D_e(\phi_E - \phi_p) - (\Gamma S)_w \left(\frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta x_{wp}} \right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow [\max(F_e, 0)\phi_p - \max(-F_e, 0)\phi_E] - [F_w\phi_w] - [D_e(\phi_E - \phi_p) - 2D_w(\phi_p - \phi_w)] = 0$$



Gambar 3.21 Volume kontrol di batas kiri domain hitung transpor konvektif-difusif

Dengan pengelompokan koefisien, persamaan di atas berubah menjadi

$$[\max(F_e, 0) + D_e + 2D_w]\phi_P + [-\max(-F_e, 0) - D_e]\phi_E = [F_w + 2D_w]\phi_w$$

atau dapat pula dituliskan dalam bentuk

$$[\max(-F_e, 0) + D_e + F_e + 2D_w]\phi_P + [-\max(-F_e, 0) - D_e]\phi_E = [F_w + 2D_w]\phi_w$$

Dalam hal ini $\phi_w = 100$ ppm, sehingga

$$a_w = 0$$

$$a_E = -\max(-F_e, 0) - D_e = -\max(-0.024, 0) - 0.400 = -0.400 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R_P = -2D_w = -2 \times 0.400 = -0.800 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_P = -a_E + F_e - R_P = -0.400 + 0.024 + 0.800 = 1.224 \text{ m}^3/\text{s}$$

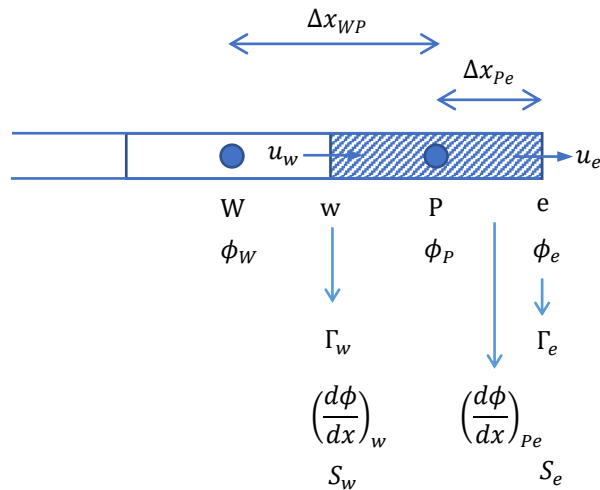
$$R_u = (F_w + 2D_w)\phi_w = (0.024 + 2 \times 0.400) \times 100 = 82.400 \text{ ppm m}^3/\text{s}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1, dengan demikian, adalah

$$cv \ 1: \quad (1.224)\phi_P + (-0.400)\phi_E = 82.400$$

Volume kontrol 7. Sisi kanan volume kontrol ini berimpit dengan batas domain hitung. Untuk memudahkan pemahaman, Gambar 3.15 ditampilkan kembali dalam Gambar 3.22. Suku a_P dan suku *source*, $R_u + R_P\phi_P$ dihitung dengan cara berbeda dari cara sebelumnya di volume kontrol 2, 3, 4, 5, dan 6. Suku *source* sama dengan nol karena tidak ada *source*, $\bar{R}\Delta V = 0$. Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7 adalah

$$[F_e\phi_e] - [\max(F_w, 0)\phi_w - \max(-F_w, 0)\phi_P] - [2D_e(\phi_e - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_w)] = 0$$



Gambar 3.22 Volume kontrol di batas kanan domain hitung transpor konvektif-difusif

Dengan pengelompokan koefisien, persamaan di atas berubah menjadi

$$[-\max(F_w, 0) - D_w]\phi_w + [\max(-F_w, 0) + D_w + 2D_e]\phi_P = [-F_e + 2D_e]\phi_e$$

atau dapat pula dituliskan sebagai berikut

$$[-\max(F_w, 0) - D_w]\phi_w + [\max(F_w, 0) + D_w - F_w + 2D_e]\phi_P = [-F_e + 2D_e]\phi_e$$

Dalam hal ini $\phi_e = 25$ ppm, sehingga

$$a_w = -\max(F_w, 0) - D_w = -\max(0.024, 0) - 0.400 = -0.424 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_E = 0$$

$$R_P = -2D_e = -2 \times 0.400 = -0.800 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_P = -a_w - F_w - R_P = 0.424 - 0.024 + 0.800 = 1.200 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R_u = (-F_e + 2D_e)\phi_e = (-0.024 + 2 \times 0.400) \times 25 = 19.400 \text{ ppm m}^3/\text{s}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7, dengan demikian, adalah

$$cv \ 7: \quad (-0.424)\phi_w + (1.200)\phi_P = 19.400$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di tujuh volume kontrol membentuk satu sistem persamaan linear berikut.

$$cv \ 1: \quad 1.224\phi_1 - 0.400\phi_2 = 82.400$$

$$cv \ 2: \quad -0.424\phi_1 + 0.824\phi_2 - 0.400\phi_3 = 0$$

$$cv \ 3: \quad -0.424\phi_2 + 0.824\phi_3 - 0.400\phi_4 = 0$$

$$cv \ 4: \quad -0.424\phi_3 + 0.824\phi_4 - 0.400\phi_5 = 0$$

$$cv \ 5: \quad -0.424\phi_4 + 0.824\phi_5 - 0.400\phi_6 = 0$$

$$cv \ 6: \quad -0.424\phi_5 + 0.824\phi_6 - 0.400\phi_7 = 0$$

$$cv \ 7: \quad -0.424\phi_6 + 1.200\phi_7 = 19.400$$

Tampak bahwa cara pertama dan cara kedua penyusunan persamaan diskret transpor konvektif-difusif memberikan hasil yang sama.

Ketujuh persamaan diskret transpor konvektif-difusif di semua volume kontrol dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} 1.224 & -0.400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.424 & 0.824 & -0.400 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.424 & 0.824 & -0.400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.424 & 0.824 & -0.400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.424 & 0.824 & -0.400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.424 & 0.824 & -0.400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.424 & 1.200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 82.400 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19.400 \end{Bmatrix}$$

Dengan bantuan *spreadsheet* untuk melakukan hitungan inversi matriks dan perkalian matriks, diperoleh konsentrasi polutan dalam satuan ppm di setiap volume kontrol berikut

95.56
86.40
76.70
66.41
55.50
43.95
31.69

3.2.4 Hybrid Difference Scheme

Hybrid difference scheme diperkenalkan oleh Spalding (1972). Skema ini pada dasarnya menggabungkan skema *central difference* dan *upwind difference*. Menurut skema ini, skema *central* atau *upwind difference* dipilih berdasarkan nilai Angka Peclet, Pe , yang didefinisikan di sisi volume kontrol yaitu

$$Pe_e = \frac{F_e}{D_e} = \frac{u_e S_e}{\Gamma_e S_e / \Delta x_{PE}}$$

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{u_w S_w}{\Gamma_w S_w / \Delta x_{WP}}$$

Dalam skema *hybrid difference*, fluks massa di sisi volume kontrol dihitung memakai *central difference* apabila Angka Peclet bernilai antara -2 s.d. 2 dan dihitung memakai *upwind difference* dan **difusi diabaikan** apabila Angka Peclet lebih besar daripada 2 atau lebih kecil daripada -2 .

Seksi-seksi di bawah ini memaparkan cara diskretisasi persamaan transpor konvektif-difusif skema *hybrid difference*, yang dilakukan dengan dua cara.

1 Cara pertama diskretisasi persamaan transpor konvektif-difusif skema *hybrid difference*

Dalam skema *hybrid difference*, fluks massa di sisi kanan volume kontrol, e , adalah sebagai berikut.

- Jika $-2 < Pe_e < 2$

Fluks massa di sisi volume kontrol dihitung memakai skema *hybrid difference*.

$$Q_e = u_e S_e \left(\frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) - \Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right)$$

$$\Rightarrow Q_e = \left(\frac{u_e S_e}{2} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_P + \left(\frac{u_e S_e}{2} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E$$

Apabila ukuran volume kontrol P dan E tidak sama, maka persamaan di atas diubah menjadi sebagai berikut (lihat Gambar 3.12).

$$Q_e = u_e S_e \left(\frac{\Delta x_{eE} \phi_P + \Delta x_{Pe} \phi_E}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} \right) - \Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right)$$

$$\Rightarrow Q_e = \left(\frac{\Delta x_{eE} u_e S_e}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_P + \left(\frac{\Delta x_{Pe} u_e S_e}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E$$

- Jika $Pe_e \geq 2$ (dalam hal ini $u_e S_e > 0$)

Fluks massa di sisi volume kontrol hanya berupa transpor konvektif yang dihitung memakai skema *upwind difference* dan transpor difusif diabaikan.

$$Q_e = u_e S_e \phi_P$$

Persamaan di atas berlaku untuk ukuran volume kontrol P dan E seragam atau pun tidak seragam.

- Jika $Pe_e \leq -2$ (dalam hal ini $u_e S_e < 0$)

Fluks massa di sisi volume kontrol hanya berupa transpor konvektif yang dihitung memakai *upwind difference* dan transpor difusif diabaikan.

$$Q_e = u_e S_e \phi_E$$

Persamaan di atas berlaku untuk ukuran volume kontrol P dan E seragam atau pun tidak seragam.

Fluks massa di sisi kiri volume kontrol, w , dihitung dengan cara yang sama dengan cara hitungan di atas.

Volume kontrol 2 s.d. 6. Ukuran volume kontrol adalah seragam, kecepatan aliran seragam, dan koefisien difusi pun seragam. Angka Peclet di sisi-sisi volume kontrol adalah sebagai berikut.

$$Pe_e = Pe_w = \frac{uS}{\Gamma S / \Delta x} = \frac{0.30 \times 0.40 \times 0.20}{5 \times 0.40 \times 0.20 / 1} = \frac{0.024}{0.400} = 0.06$$

Karena Angka Peclet berada dalam rentang -2 s.d. 2, maka fluks massa di sisi kiri dan sisi kanan volume kontrol dihitung dengan cara *central difference*. Cara perhitungan fluks massa skema *central difference* telah dipaparkan di Subbab 3.2.2.

$$\left[u_e S_e \left(\frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) - u_w S_w \left(\frac{\phi_W + \phi_P}{2} \right) \right] - \left[\Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) \right] = \bar{R} \Delta V$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{u_w S_w}{2} - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_W + \left(-\frac{u_w S_w}{2} + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} + \frac{u_e S_e}{2} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_P + \left(\frac{u_e S_e}{2} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E$$

$$= \bar{R} \Delta V$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{0.024}{2} - 0.400\right)\phi_W + \left(-\frac{0.024}{2} + 0.400 + \frac{0.024}{2} + 0.400\right)\phi_P + \left(\frac{0.024}{2} - 0.400\right)\phi_E = 0$$

$$\Rightarrow (-0.412)\phi_W + (0.800)\phi_P + (-0.388)\phi_E = 0$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 2 s.d. 6, dengan demikian, adalah

$$cv\ 2: -0.412\phi_1 + 0.800\phi_2 - 0.388\phi_3 = 0$$

$$cv\ 3: -0.412\phi_2 + 0.800\phi_3 - 0.388\phi_4 = 0$$

$$cv\ 4: -0.412\phi_3 + 0.800\phi_4 - 0.388\phi_5 = 0$$

$$cv\ 5: -0.412\phi_4 + 0.800\phi_5 - 0.388\phi_6 = 0$$

$$cv\ 6: -0.412\phi_5 + 0.800\phi_6 - 0.388\phi_7 = 0$$

Volume kontrol 1. Sisi kiri volume kontrol ini, w , berimpit dengan batas domain hitung. Di sebelah kiri (*West*), tidak ada volume kontrol tetangga. Volume kontrol W tidak ada. Di sebelah kanan, volume kontrol ini bertetangga dengan volume kontrol 2. Volume kontrol ini menjadi volume kontrol E . Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1 adalah

$$\begin{aligned} & \left[u_e S_e \left(\frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) - u_w S_w (\phi_w) \right] - \left[\Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_P - \phi_w}{\Delta x_{WP}} \right) \right] = \bar{R} \Delta V \\ \Rightarrow & \left[u_e S_e \left(\frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) - u_w S_w (100) \right] - \left[\Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_P - 100}{\Delta x_{WP}} \right) \right] = 0 \\ \Rightarrow & \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} + \frac{u_e S_e}{2} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_P + \left(\frac{u_e S_e}{2} - \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E = u_w S_w (100) + \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) 100 \\ \Rightarrow & \left(\frac{5 \times 0.40 \times 0.20}{0.5} + \frac{0.024}{2} + 0.400 \right) \phi_P + \left(\frac{0.024}{2} - 0.400 \right) \phi_E \\ & = 0.024 \times 100 + \frac{5 \times 0.40 \times 0.20}{0.5} \times 100 \\ \Rightarrow & (1.212)\phi_P + (-0.388)\phi_E = 82.400 \end{aligned}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1, dengan demikian, adalah

$$cv\ 1: 1.212\phi_1 - 0.388\phi_2 = 82.400$$

Volume kontrol 7. Di sebelah kiri, volume kontrol ini bertetangga dengan volume kontrol 6, yang menjadi volume kontrol W . Sisi kanan volume kontrol ini, e , berimpit dengan batas domain hitung. Di sebelah kanan (*East*), tidak ada volume kontrol tetangga. Volume kontrol E tidak ada. Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7 berbentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & \left[u_e S_e \phi_e - u_w S_w \left(\frac{\phi_W + \phi_P}{2} \right) \right] - \left[\Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_e - \phi_P}{\Delta x_{Pe}} \right) - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) \right] = \bar{R} \Delta V \\ \Rightarrow & \left[u_e S_e \times (25) - u_w S_w \left(\frac{\phi_W + \phi_P}{2} \right) \right] - \left[\Gamma_e S_e \left(\frac{25 - \phi_P}{\Delta x_{Pe}} \right) - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \left(-\frac{u_w S_w}{2} - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_w + \left(-\frac{u_w S_w}{2} + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}} \right) \phi_p = -u_e S_e (25) + \left(\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{Pe}} \right) 25 \\
 &\Rightarrow \left(-\frac{0.024}{2} - 0.400 \right) \phi_w + \left(-\frac{0.024}{2} + 0.400 + \frac{5 \times 0.40 \times 0.20}{0.5} \right) \phi_p \\
 &= -0.024 \times 25 + \frac{5 \times 0.40 \times 0.20}{0.5} \times 25 \\
 &\Rightarrow (-0.412) \phi_w + (1.188) \phi_p = 19.400
 \end{aligned}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7, dengan demikian, adalah

$$cv \ 7: \quad -0.412 \phi_6 + 1.188 \phi_7 = 19.400$$

2 Cara kedua diskretisasi persamaan transpor konvektif-difusif skema *hybrid difference*

Cara kedua diskretisasi persamaan transpor konvektif-difusif skema *hybrid difference* ini menghasilkan persamaan yang mudah untuk dituliskan dalam program komputer. Para-graf-paragraf di bawah memaparkan langkah diskretisasi cara kedua ini untuk volume kontrol berukuran seragam.

Perhatikan bahwa syarat $-2 < Pe_e < 2$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$-2 < \frac{F_e}{D_e} < 2 \quad \text{atau} \quad -D_e < \frac{1}{2}F_e < D_e \quad \text{atau} \quad \frac{1}{2}F_e - D_e < F_e < \frac{1}{2}F_e + D_e$$

Untuk ukuran volume kontrol seragam, jika $\frac{1}{2}F_e + D_e > F_e$, maka koefisien ϕ_E adalah $a_E = \frac{1}{2}F_e - D_e$ dan jika syarat ini tidak dipenuhi, yaitu jika $F_e > \frac{1}{2}F_e + D_e$, maka koefisien ϕ_E adalah $a_E = 0$ jika $F_e > 0$ atau $a_E = F_e$ jika $F_e < 0$.

Koefisien a_E , dengan demikian, dapat dituliskan dalam bentuk ringkas

$$a_E = -\max \left[-F_e, -\left(\frac{F_e}{2} - D_e \right), 0 \right]$$

Koefisien a_P dalam bentuk ringkas adalah

$$a_P = -a_E + F_e$$

Sejalan dengan sisi kanan volume kontrol, di sisi kiri volume kontrol, syarat $-2 < Pe_w < 2$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$-2 < \frac{F_w}{D_w} < 2 \quad \text{atau} \quad -D_w < \frac{1}{2}F_w < D_w \quad \text{atau} \quad \frac{1}{2}F_w - D_w < F_w < \frac{1}{2}F_w + D_w$$

Jika $\frac{1}{2}F_w + D_w > F_w$, maka koefisien ϕ_W adalah $a_W = -\frac{1}{2}F_w - D_w$ dan jika syarat ini tidak dipenuhi, yaitu jika $F_w > \frac{1}{2}F_w + D_w$, maka koefisien ϕ_W adalah $a_W = -F_w$ jika $F_w > 0$ atau $a_W = 0$ jika $F_w < 0$.

Koefisien a_W dapat dituliskan dalam bentuk ringkas

$$a_W = -\max \left[F_w, \left(\frac{F_w}{2} + D_w \right), 0 \right]$$

Koefisien a_p dalam bentuk ringkas adalah

$$a_p = -a_w - F_w$$

Dengan demikian, bentuk persamaan diskret transpor konvektif-difusif di sebuah volume kontrol dapat dituliskan secara ringkas menjadi

$$a_w \phi_w + a_p \phi_p + a_e \phi_e = R_u$$

Dalam persamaan di atas, koefisien-koefisien a_w , a_e , dan a_p adalah

$$a_w = -\max \left[F_w, \left(\frac{F_w}{2} + D_w \right), 0 \right]$$

$$a_e = -\max \left[-F_e, -\left(\frac{F_e}{2} - D_e \right), 0 \right]$$

$$a_p = -a_w - a_e + F_e - F_w - R_p$$

Persamaan di atas merupakan bentuk diskret persamaan transpor konvektif-difusif permanen satu dimensi. Paragraf-paragraf di bawah ini memaparkan penerapan persamaan diskret transpor konvektif-difusif menurut skema *hybrid difference* dalam kasus transpor polutan di saluran laboratorium.

Volume kontrol 2 s.d. 6. Fluks konvektif dan difusif telah dihitung di subbab yang membahas skema *central difference*, yaitu

$$F_w = F_e = u S = 0.30 \times 0.08 = 0.024 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$D_w = D_e = \frac{\Gamma S}{\Delta x} = \frac{5 \times 0.08}{1} = 0.400 \text{ m}^3/\text{s}$$

Koefisien-koefisien persamaan diskret transpor konvektif-difusif adalah

$$a_w = -\max \left[F_w, \left(\frac{F_w}{2} + D_w \right), 0 \right] = -\max \left[0.024, \left(\frac{0.024}{2} + 0.400 \right), 0 \right] = -0.412 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_e = -\max \left[-F_e, -\left(\frac{F_e}{2} - D_e \right), 0 \right] = -\max \left[-0.024, -\left(\frac{0.024}{2} - 0.400 \right), 0 \right] = -0.388 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_p = -a_w - a_e + F_e - F_w - R_p = -0.412 - 0.388 + 0.024 - 0.024 - 0 = 0.800 \text{ m}^3/\text{s}$$

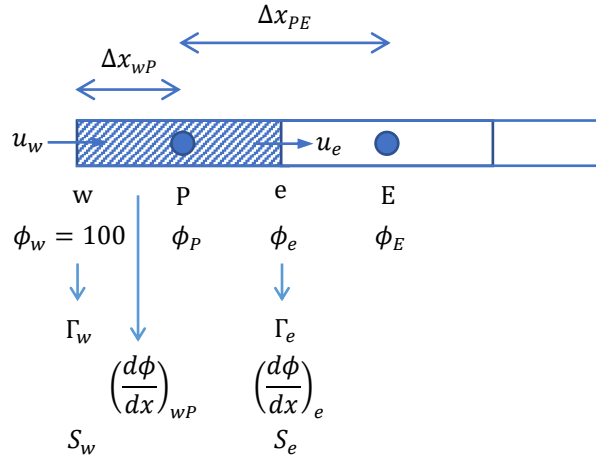
Perlu dicatat bahwa dalam kasus ini tidak ada *source*, sehingga $R_u = 0$ dan $R_p = 0$.

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 2 s.d. 6 adalah

$$cv \text{ 2 s.d. 6: } (-0.412)\phi_w + (0.800)\phi_p + (-0.388)\phi_e = 0$$

Volume kontrol 1. Sisi kiri volume kontrol ini berimpit dengan batas domain hitung. Untuk membantu pemahaman, Gambar 3.14 ditampilkan kembali dalam Gambar 3.23. Suku a_p dan suku *source*, $R_u + R_p \phi_p$, dihitung dengan cara yang berbeda dari cara sebelumnya di volume kontrol 2 s.d. 6. Suku *source* sama dengan nol karena tidak ada *source*, $\bar{R}\Delta V = 0$. Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1 adalah

$$- \left[F_w \phi_w - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_P - \phi_w}{\Delta x_{wP}} \right) \right] + \left\{ \max \left[-F_e, -\left(\frac{F_e}{2} - D_e \right), 0 \right] + F_e \right\} \phi_P \\ - \max \left[-F_e, -\left(\frac{F_e}{2} - D_e \right), 0 \right] \phi_E = 0$$



Gambar 3.23 Volume kontrol di batas kiri domain hitung transpor konvektif-difusif

Persamaan di atas dapat pula dituliskan sebagai berikut.

$$- [F_w \phi_w - 2D_w(\phi_P - \phi_w)] + \left\{ \max \left[-F_e, -\left(\frac{F_e}{2} - D_e \right), 0 \right] + F_e \right\} \phi_P \\ - \max \left[-F_e, -\left(\frac{F_e}{2} - D_e \right), 0 \right] \phi_E = 0$$

Dengan pemindahan suku-suku yang nilainya diketahui ke sisi kanan tanda kesamaan, maka persamaan di atas berubah menjadi

$$\left\{ \max \left[-F_e, -\left(\frac{F_e}{2} - D_e \right), 0 \right] + F_e + 2D_w \right\} \phi_P - \max \left[-F_e, -\left(\frac{F_e}{2} - D_e \right), 0 \right] \phi_E \\ = [F_w + 2D_w] \phi_w$$

Dalam hal ini $\phi_w = 100$ ppm, sehingga

$$a_w = 0$$

$$a_E = - \max \left[-F_e, -\left(\frac{F_e}{2} - D_e \right), 0 \right] = - \max \left[-0.024, -\left(\frac{0.024}{2} - 0.400 \right), 0 \right] = -0.388 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R_P = -2D_w = -2 \times 0.400 = -0.800 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_P = -a_E + F_e - R_P = 0.388 + 0.024 + 0.800 = 1.212 \text{ m}^3/\text{s}$$

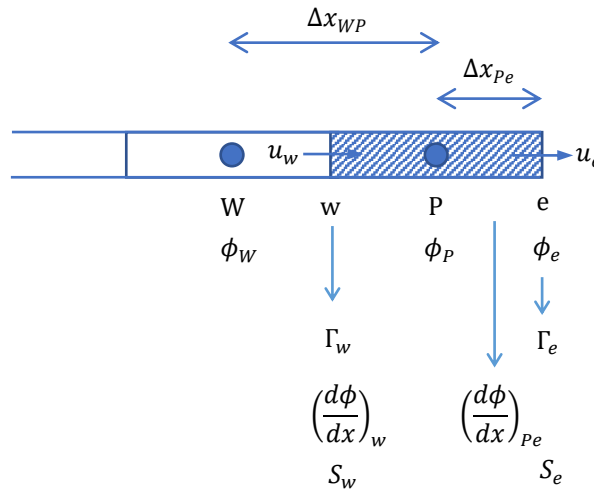
$$R_u = (F_w + 2D_w) \phi_w = (0.024 + 2 \times 0.400) \times 100 = 82.400 \text{ ppm m}^3/\text{s}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1 adalah

$$cv \ 1: \quad (1.212) \phi_P + (-0.388) \phi_E = 82.400$$

Volume kontrol 7. Sisi kanan volume kontrol ini berimpit dengan batas domain hitung. Untuk memudahkan pemahaman, Gambar 3.15 ditampilkan kembali dalam Gambar 3.24. Suku a_p dan suku *source*, $R_u + R_p \phi_p$, dihitung dengan cara yang berbeda dari cara sebelumnya di volume kontrol 2 s.d. 6. Suku *source* sama dengan nol karena tidak ada *source*, $\bar{R}\Delta V = 0$. Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7 adalah

$$-\max\left[F_w, \left(\frac{F_w}{2} + D_w\right), 0\right] \phi_w + \left\{\max\left[F_w, \left(\frac{F_w}{2} - D_w\right), 0\right] - F_w\right\} \phi_p + \left[F_e \phi_e - \Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x_{pe}}\right)\right] = 0$$



Gambar 3.24. Volume kontrol di batas kanan domain hitung transpor konvektif-difusif

Persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk

$$-\max\left[F_w, \left(\frac{F_w}{2} + D_w\right), 0\right] \phi_w + \left\{\max\left[F_w, \left(\frac{F_w}{2} - D_w\right), 0\right] - F_w\right\} \phi_p + [F_e \phi_e - 2D_e(\phi_e - \phi_p)] = 0$$

Dengan pemindahan suku-suku yang nilainya diketahui ke sisi kanan tanda kesamaan, maka persamaan di atas berubah menjadi

$$-\max\left[F_w, \left(\frac{F_w}{2} + D_w\right), 0\right] \phi_w + \left\{\max\left[F_w, \left(\frac{F_w}{2} - D_w\right), 0\right] - F_w + 2D_e\right\} \phi_p = (-F_e + 2D_e)\phi_e$$

Dalam hal ini $\phi_e = 25$ ppm, sehingga

$$a_w = -\max\left[F_w, \left(\frac{F_w}{2} + D_w\right), 0\right] = -\max\left[0.024, \left(\frac{0.024}{2} + 0.400\right), 0\right] = -0.412 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_E = 0$$

$$R_p = -2D_e = -2 \times 0.400 = -0.800 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_p = -a_w - F_w - R_p = 0.412 - 0.024 + 0.800 = 1.188 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R_u = (-F_e + 2D_e)\phi_e = (-0.024 + 2 \times 0.400) \times 25 = 19.400 \text{ ppm m}^3/\text{s}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7 adalah

$$cv\ 7: (-0.412)\phi_W + (1.188)\phi_P = 19.400$$

Dua cara diskretisasi persamaan transpor konvektif-difusif skema *hybrid difference* yang dipaparkan di atas menghasilkan persamaan yang sama. Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di semua volume kontrol yang diperoleh dengan cara skema *hybrid difference* adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} cv\ 1: & 1.212\phi_1 - 0.388\phi_2 = 82.400 \\ cv\ 2: & -0.412\phi_1 + 0.800\phi_2 - 0.388\phi_3 = 0 \\ cv\ 3: & -0.412\phi_2 + 0.800\phi_3 - 0.388\phi_4 = 0 \\ cv\ 4: & -0.412\phi_3 + 0.800\phi_4 - 0.388\phi_5 = 0 \\ cv\ 5: & -0.412\phi_4 + 0.800\phi_5 - 0.388\phi_6 = 0 \\ cv\ 6: & -0.412\phi_5 + 0.800\phi_6 - 0.388\phi_7 = 0 \\ cv\ 7: & -0.412\phi_6 + 1.188\phi_7 = 19.400 \end{aligned}$$

Persamaan di atas yang dituliskan dalam bentuk perkalian matriks adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1.212 & -0.388 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.412 & 0.800 & -0.388 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.412 & 0.800 & -0.388 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.412 & 0.800 & -0.388 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.412 & 0.800 & -0.388 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.412 & 0.800 & -0.388 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.412 & 1.188 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 82.400 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19.400 \end{Bmatrix}$$

Penyelesaian sistem persamaan di semua volume kontrol di atas, yang dilakukan dengan bantuan *spreadsheet* untuk melakukan hitungan inversi matriks dan perkalian matriks, memberikan konsentrasi polutan dalam satuan ppm di setiap volume kontrol sebagai berikut.

95.69
86.54
76.82
66.50
55.55
43.91
31.56

3.2.5 Power Law Scheme

Power-law scheme dikenalkan oleh Patankar (1980). Hasil hitungan dengan skema ini lebih akurat daripada hasil hitungan dengan skema hibrid. Dalam skema *power-law*, fluks di sisi-sisi volume kontrol dihitung dengan suatu persamaan polinomial apabila Angka Peclet bernilai antara -10 s.d. 10. Apabila Angka Peclet lebih besar daripada 10 atau lebih kecil daripada -10, maka fluks massa dihitung dengan skema *upwind difference* dan **difusi diabaikan**.

Dalam skema *power-law*, fluks massa di sisi kanan volume kontrol adalah sebagai berikut.

- Jika $-10 < Pe_e < 10$

$$Q_e = F_e[\phi_P - \beta_e(\phi_E - \phi_P)]$$

$$F_e = u_e S_e$$

$$\beta_e = \frac{(1 - 0.1Pe_e)^5}{Pe_e}$$

$$Pe_e = \frac{F_e}{D_e} = \frac{u_e S_e}{\Gamma_e S_e / \Delta x_{PE}}$$

- Jika $Pe_e \geq 10$ (dalam hal ini $F_e > 0$)

$$Q_e = F_e \phi_P$$

- Jika $Pe_e \leq -10$ (dalam hal ini $F_e < 0$)

$$Q_e = F_e \phi_E$$

Fluks massa di sisi kiri volume kontrol dihitung dengan cara yang sama seperti di atas.

- jika $-10 < Pe_w < 10$

$$Q_w = F_w [\phi_W - \beta_w (\phi_P - \phi_W)]$$

$$F_w = u_w S_w$$

$$\beta_w = \frac{(1 - 0.1Pe_w)^5}{Pe_w}$$

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{u_w S_w}{\Gamma_w S_w / \Delta x_{WP}}$$

- Jika $Pe_w \geq 10$ (dalam hal ini $F_w > 0$)

$$Q_w = F_w \phi_W$$

- Jika $Pe_w \leq -10$ (dalam hal ini $F_w < 0$)

$$Q_w = F_w \phi_P$$

Dengan demikian, bentuk diskret persamaan transpor konvektif-difusif di sebuah volume kontrol dapat dituliskan secara ringkas menjadi

$$a_W \phi_W + a_P \phi_P + a_E \phi_E = R_u$$

Dalam persamaan di atas, koefisien-koefisien a_W , a_E , dan a_P adalah

$$a_W = -\max(F_w, 0) - D_w \max[(1 - 0.1|Pe_w|)^5, 0]$$

$$a_E = -\max(-F_e, 0) - D_e \max[(1 - 0.1|Pe_e|)^5, 0]$$

$$a_P = -a_W - a_E + F_e - F_w - R_P$$

Persamaan di atas merupakan bentuk diskret persamaan transpor konvektif-difusif permanen satu dimensi. Paragraf-paragraf di bawah ini memaparkan penerapan persamaan diskret transpor konvektif-difusif *power law scheme* dalam kasus transpor polutan di saluran laboratorium.

Volume kontrol 2 s.d. 6. Fluks konvektif dan konduktivitas difusif telah dihitung di subbab yang membahas *central difference scheme*, yaitu

$$F_w = F_e = u S = 0.30 \times 0.08 = 0.024 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$D_w = D_e = \frac{\Gamma S}{\Delta x} = \frac{5 \times 0.08}{1} = 0.400 \text{ m}^3/\text{s}$$

Angka Peclet dapat diperoleh dari kedua nilai itu.

$$Pe_w = Pe_e = \frac{F_w}{D_w} = \frac{F_e}{D_e} = \frac{0.024}{0.400} = 0.060$$

Koefisien-koefisien persamaan diskret transpor konvektif-difusif adalah

$$\begin{aligned} a_w &= -\max(F_w, 0) - D_w \max[(1 - 0.1|Pe_w|)^5, 0] \\ &= -\max(0.024, 0) - 0.400 \times \max[(1 - 0.1|0.06|)^5, 0] \\ &= -0.024 - 0.400 \times (1 - 0.006)^5 = -0.412 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_e &= -\max(-F_e, 0) - D_e \max[(1 - 0.1|Pe_e|)^5, 0] \\ &= -\max(-0.024, 0) - 0.400 \times \max[(1 - 0.1|0.06|)^5, 0] \\ &= 0 - 0.400 \times (1 - 0.006)^5 = -0.388 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$a_p = -a_w - a_e + F_e - F_w - R_p = 0.412 + 0.388 + 0.024 - 0.024 - 0 = 0.800 \text{ m}^3/\text{s}$$

Perlu dicatat bahwa dalam kasus ini tidak ada *source*, sehingga $R_u = 0$ dan $R_p = 0$.

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 2 s.d. 6 adalah

$$cv \text{ 2 s.d. 6: } (-0.412)\phi_w + (0.800)\phi_p + (-0.388)\phi_e = 0$$

Volume kontrol 1. Sisi kiri volume kontrol ini berimpit dengan batas domain hitung. Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1 adalah

$$\{a_e\phi_e + (-a_e + F_e)\phi_p\} - \{F_w\phi_w - 2D_w \max[(1 - 0.1|Pe_w|)^5, 0] (\phi_p - \phi_w)\} = 0$$

Dengan pemindahan suku-suku yang nilainya diketahui ke sisi kanan tanda kesamaan, maka persamaan di atas berubah menjadi

$$\begin{aligned} \{(-a_e + F_e) + 2D_w \max[(1 - 0.1|Pe_w|)^5, 0]\} \phi_p + a_e\phi_e \\ = \{F_w + 2D_w \max[(1 - 0.1|Pe_w|)^5, 0]\} \phi_w \end{aligned}$$

Dalam hal ini $\phi_w = 100$ ppm, sehingga

$$a_w = 0$$

$$\begin{aligned} a_e &= -\max(-F_e, 0) - D_e \max[(1 - 0.1|Pe_e|)^5, 0] \\ &= -\max(-0.024, 0) - 0.400 \times \max[(1 - 0.1|0.06|)^5, 0] \\ &= 0 - 0.400 \times (1 - 0.006)^5 = -0.388 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_p &= -2D_w \max[(1 - 0.1|Pe_w|)^5, 0] = -2 \times 0.400 \times \max[(1 - 0.1|0.06|)^5, 0] \\ &= -2 \times 0.400 \times (1 - 0.006)^5 = -0.776 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$a_P = -a_E + F_e - R_P = 0.388 + 0.024 + 0.766 = 1.188 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\begin{aligned} R_u &= \{F_w + 2D_w \max[(1 - 0.1|Pe_w|)^5, 0]\} \phi_w \\ &= \{0.024 + 2 \times 0.400 \times (1 - 0.1|0.06|)^5\} \times 100 \\ &= \{0.024 + 2 \times 0.400 \times (1 - 0.006)^5\} \times 100 = 80.029 \text{ ppm m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1 adalah

$$cv \ 1: \ (1.188)\phi_P + (-0.388)\phi_E = 80.029$$

Volume kontrol 7. Sisi kanan volume kontrol ini berimpit dengan batas domain hitung. Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7 adalah

$$\{F_e\phi_e - 2D_e \max[(1 - 0.1|Pe_e|)^5, 0] (\phi_e - \phi_P)\} + (-a_W - F_w)\phi_P + a_W\phi_W = 0$$

Dengan pemindahan suku-suku yang nilainya diketahui ke sisi kanan tanda kesamaan, maka persamaan di atas berubah menjadi

$$\begin{aligned} a_W\phi_W + \{(-a_W - F_w) + 2D_e \max[(1 - 0.1|Pe_e|)^5, 0]\}\phi_P \\ = \{-F_e + 2D_e \max[(1 - 0.1|Pe_e|)^5, 0]\}\phi_e \end{aligned}$$

Dalam hal ini $\phi_e = 25$ ppm, sehingga

$$\begin{aligned} a_W &= -\max[F_w, 0] - D_w \max[(1 - 0.1|Pe_w|)^5, 0] \\ &= -\max[0.024, 0] - 0.400 \times \max[(1 - 0.1|0.06|)^5, 0] \\ &= -0.024 - 0.400 \times (1 - 0.1|0.06|)^5 = -0.024 - 0.400 \times (1 - 0.006)^5 \\ &= -0.412 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$a_E = 0$$

$$\begin{aligned} R_P &= -2D_e \max[(1 - 0.1|Pe_e|)^5, 0] = -2 \times 0.400 \times \max[(1 - 0.1|0.06|)^5, 0] \\ &= -2 \times 0.400 \times (1 - 0.006)^5 = -0.776 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$a_P = -a_W - F_w - R_P = 0.412 - 0.024 + 0.776 = 1.164 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\begin{aligned} R_u &= \{-F_e + 2D_e \max[(1 - 0.1|Pe_e|)^5, 0]\} \phi_e \\ &= (-0.024 + 2 \times 0.400 \times \max[(1 - 0.1|0.06|)^5, 0]) \times 25 \\ &= 19.400 \text{ ppm m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7 adalah

$$cv \ 7: \ (-0.412)\phi_W + (1.164)\phi_P = 19.400$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di semua volume kontrol yang disusun dengan skema *power law scheme* dalam bentuk perkalian matriks adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1.188 & -0.388 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.412 & 0.800 & -0.388 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.412 & 0.800 & -0.388 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.412 & 0.800 & -0.388 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.412 & 0.800 & -0.388 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.412 & 0.800 & -0.388 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.412 & 1.164 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80.029 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19.400 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian sistem persamaan di semua volume kontrol di atas, yang dilakukan dengan bantuan *spreadsheet* untuk melakukan hitungan inversi matriks dan perkalian matriks, memberikan konsentrasi polutan dalam satuan ppm di setiap volume kontrol dengan nilai sebagai berikut.

95.63
86.61
77.04
66.88
56.08
44.62
32.45

3.2.6 QUICK Scheme

QUICK adalah singkatan *Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics*. Skema ini dikenalkan pertama kali oleh Leonard (1979). Skema ini merupakan skema bertingkat (berorder) dua atau kuadrat. Dengan skema yang lebih tinggi, diharapkan kesalahan diskretisasi yang diakibatkan oleh adanya difusi numeris (perihal difusi numeris ini dibahas dalam tulisan yang membahas diskretisasi dua dimensi) akan berkurang. Skema QUICK memperhatikan lebih banyak volume kontrol tetangga dibandingkan dengan skema-skema yang telah dibahas dalam empat subbab sebelum subbab ini. Nilai variabel di tiga volume kontrol sisi hulu (prinsip *upwind difference*) dipakai untuk menetapkan nilai variabel di suatu sisi volume kontrol. Nilai ϕ di sisi volume kontrol diperoleh dengan memakai kurva kuadrat yang melewati tiga titik hitung, yaitu dua titik hitung di tetangga terdekat (W dan E) serta satu titik hitung di sisi hulu seperti ditunjukkan oleh Gambar 3.25.

Apabila kecepatan positif, $u_w > 0$ dan $u_e > 0$, maka nilai ϕ_w ditetapkan dengan memakai fungsi kuadrat yang melewati nilai-nilai ϕ di titik hitung WW, W, dan P. Nilai ϕ_e ditetapkan berdasarkan fungsi kuadrat yang melalui nilai-nilai ϕ di titik hitung W, P, dan E. Apabila kecepatan negatif, $u_w < 0$ dan $u_e < 0$, maka nilai ϕ_w ditetapkan dengan memakai fungsi kuadrat yang melewati nilai-nilai ϕ di titik hitung W, P, dan E. Nilai ϕ_e ditetapkan berdasarkan fungsi kuadrat yang melalui nilai-nilai ϕ di titik hitung P, E, dan EE.

Apabila ukuran volume kontrol seragam, maka nilai ϕ di sisi volume kontrol di antara titik-titik hitung i dan $i - 1$, serta titik hitung hulu $i - 2$ memenuhi persamaan

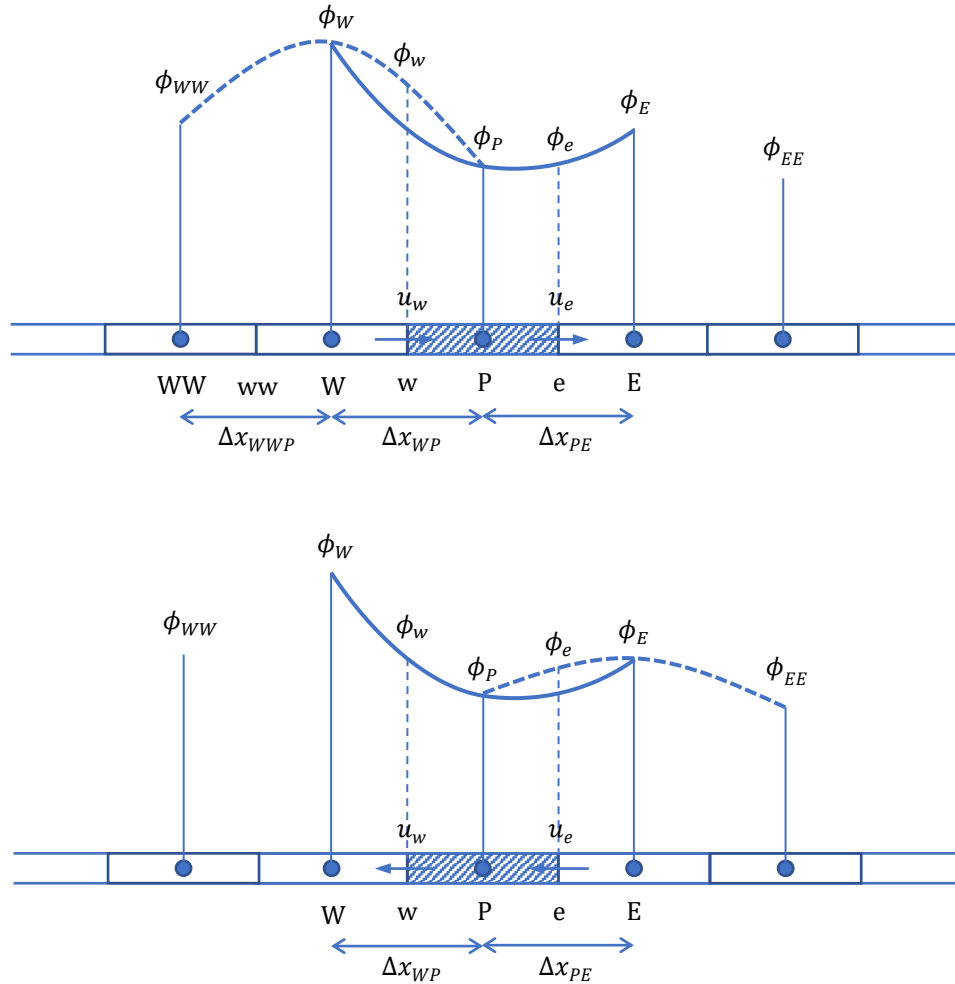
$$\phi_{sisi} = \frac{6}{8}\phi_{i-1} + \frac{3}{8}\phi_i - \frac{1}{8}\phi_{i-2}$$

Nilai ϕ_w adalah

$$\begin{aligned} \phi_w &= \frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW} & \text{jika } u_w > 0 \ (F_w > 0) \\ \phi_w &= \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_W - \frac{1}{8}\phi_E & \text{jika } u_w < 0 \ (F_w < 0) \end{aligned}$$

Nilai ϕ_e adalah

$$\begin{aligned}\phi_e &= \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W & \text{jika } u_e > 0 \ (F_e > 0) \\ \phi_e &= \frac{6}{8}\phi_E + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{EE} & \text{jika } u_e < 0 \ (F_e < 0)\end{aligned}$$



Gambar 3.25 QUICK *difference scheme* untuk arah aliran positif (gambar atas) dan untuk arah aliran negatif (gambar bawah)

Bentuk diskret persamaan transpor konvektif-difusif di sebuah volume kontrol dapat dituliskan sebagai berikut.

$$a_{WW}\phi_{WW} + a_W\phi_W + a_P\phi_P + a_E\phi_E + a_{EE}\phi_{EE} = R_u$$

Dalam persamaan di atas, koefisien-koefisien a_{WW} , a_W , a_E , a_{EE} , dan a_P adalah

$$\begin{aligned}a_{WW} &= \frac{1}{8}\alpha_w F_w \\a_W &= -\frac{6}{8}\alpha_w F_w - \frac{3}{8}(1 - \alpha_w)F_w - \frac{1}{8}\alpha_e F_e - D_w \\a_E &= \frac{3}{8}\alpha_e F_e + \frac{6}{8}(1 - \alpha_e)F_e + \frac{1}{8}(1 - \alpha_w)F_w - D_e \\a_{EE} &= -\frac{1}{8}(1 - \alpha_e)F_e \\a_P &= -a_{WW} - a_W - a_E - a_{EE} + F_e - F_w - R_P \\ \alpha_w &= \begin{cases} 1 & \text{jika } F_w > 0 \\ 0 & \text{jika } F_w < 0 \end{cases} \\ \alpha_e &= \begin{cases} 1 & \text{jika } F_e > 0 \\ 0 & \text{jika } F_e < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Paragraf-paragraf di bawah ini memaparkan penerapan persamaan diskret transpor konvektif-difusif skema QUICK dalam kasus transpor polutan di saluran laboratorium.

Volume kontrol 3 s.d. 6. Fluks konvektif dan difusif telah dihitung di subbab yang membahas skema *central difference*, yaitu

$$F_w = F_e = u S = 0.30 \times 0.08 = 0.024 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$D_w = D_e = \frac{\Gamma S}{\Delta x} = \frac{5 \times 0.08}{1} = 0.400 \text{ m}^3/\text{s}$$

Karena $F_w > 0$ dan $F_e > 0$, maka $\alpha_w = 1$ dan $\alpha_e = 1$.

Koefisien-koefisien dalam persamaan diskret persamaan transpor konvektif-difusif adalah

$$\begin{aligned}a_{WW} &= \frac{1}{8}\alpha_w F_w = \frac{1}{8} \times 1 \times 0.024 = 0.003 \text{ m}^3/\text{s} \\a_W &= -\frac{6}{8}\alpha_w F_w - \frac{3}{8}(1 - \alpha_w)F_w - \frac{1}{8}\alpha_e F_e - D_w \\&= -\left(\frac{6}{8} \times 1 \times 0.024\right) - \left[\frac{3}{8} \times (1 - 1) \times 0.024\right] - \left(\frac{1}{8} \times 1 \times 0.024\right) - 0.400 \\&= -0.421 \text{ m}^3/\text{s} \\a_E &= \frac{3}{8}\alpha_e F_e + \frac{6}{8}(1 - \alpha_e)F_e + \frac{1}{8}(1 - \alpha_w)F_w - D_e \\&= \left(\frac{3}{8} \times 1 \times 0.024\right) + \left[\frac{6}{8} \times (1 - 1) \times 0.024\right] + \left[\frac{1}{8} \times 1 \times (1 - 1) \times 0.024\right] \\&\quad - 0.400 = -0.394 \text{ m}^3/\text{s} \\a_{EE} &= -\frac{1}{8}(1 - \alpha_e)F_e = \frac{1}{8} \times (1 - 1) \times 0.024 = 0 \\a_P &= -a_{WW} - a_W - a_E - a_{EE} + F_e - F_w - R_P \\&= -0.003 + 0.421 + 0.394 - 0 + 0.024 - 0.024 - 0 = 0.812 \text{ m}^3/\text{s}\end{aligned}$$

Perlu dicatat bahwa dalam kasus ini tidak ada *source*, sehingga $R_u = 0$ dan $R_P \phi_P = 0$.

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 3 s.d. 6 adalah

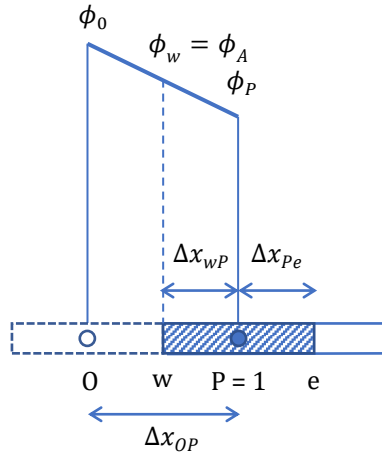
$$cv \text{ 3 s.d. 6: } (0.003)\phi_{WW} + (-0.421)\phi_W + (0.812)\phi_P + (-0.394)\phi_E = 0$$

Volume kontrol 1. Sisi kiri volume kontrol ini berimpit dengan batas domain hitung. Di sisi kanan, volume kontrol ini bertetangga dengan volume kontrol 2 dan 3 (E dan EE). Koefisien a_E dihitung seperti hitungan di volume kontrol 3 s.d. 6. Di sebelah kiri (barat), tidak ada volume kontrol tetangga, sehingga koefisien a_W tidak ada. Koefisien a_P dan suku *source* dihitung dengan cara yang berbeda dari cara hitungan *source* di volume kontrol 3 s.d. 6. Di volume kontrol 1, nilai ϕ di sisi barat telah diketahui, yaitu $\phi_w = 100$ ppm. Nilai ϕ di sisi timur, ϕ_e , dihitung dengan persamaan diskret

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W$$

Karena ϕ_W tidak ada, maka nilai ini ditetapkan di volume kontrol 0 yang merupakan hasil pencerminan volume kontrol 1. Nilai ϕ_0 ditetapkan dengan cara ekstrapolasi. Gambar 3.26 menyajikan skema ekstrapolasi untuk mendapatkan nilai ϕ_0 .

$$\phi_W = \phi_0 = 2\phi_A - \phi_P$$



Gambar 3.26 Ekstrapolasi nilai ϕ ke volume kontrol di luar batas kiri domain model

Dengan nilai ϕ_W di atas, maka nilai ϕ_e adalah

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}(2\phi_A - \phi_P) = \frac{7}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{2}{8}\phi_A$$

Memperhatikan persamaan ϕ_e di atas, maka nilai gradien di batas barat volume kontrol 1 (w) pun harus dihitung dengan cara yang konsisten dengan persamaan ini. Fluks difusif melalui sisi barat, dengan cara ini, adalah

$$\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w = \frac{D_A}{3} (9\phi_P - 8\phi_A - \phi_E)$$

Dengan demikian, persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1 adalah

$$\left[F_e \left(\frac{7}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_E - \frac{2}{8} \phi_A \right) - F_A \phi_A \right] - \left[D_e (\phi_E - \phi_P) - \frac{D_A}{3} (9\phi_P - 8\phi_A - \phi_E) \right] = 0$$

Pengaturan koefisien dalam persamaan di atas dan manipulasi matematis menghasilkan

$$\begin{aligned} & \left[\left(-\frac{3}{8} F_e + D_e + \frac{1}{3} D_A \right) + F_e - F_w - \left(-\frac{2}{8} F_e - F_A - \frac{8}{3} D_A \right) \right] \phi_P + \left(\frac{3}{8} F_e - D_e - \frac{1}{3} D_A \right) \phi_E \\ & = \left(\frac{2}{8} F_e + F_A + \frac{8}{3} D_A \right) \phi_w \end{aligned}$$

yang dapat dituliskan dalam bentuk baku persamaan diskret transpor konvektif-difusif berikut.

$$a_{WW} \phi_{WW} + a_W \phi_W + a_P \phi_P + a_E \phi_E + a_{EE} \phi_{EE} = R_u$$

Dalam hal ini, $\phi_w = 100$ ppm, $F_w = 0.024$ m³/s, $D_e = 0.400$ m³/s, dan koefisien-koefisien dalam persamaan di atas adalah

$$a_{WW} = 0$$

$$a_W = 0$$

$$a_E = \frac{3}{8} F_e - D_e - \frac{1}{3} D_w = \frac{3}{8} \times 0.024 - 0.400 - \frac{1}{3} \times 0.400 = -0.524 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_{EE} = 0$$

$$R_P = -\frac{2}{8} F_e - F_A - \frac{8}{3} D_w = -\frac{2}{8} \times 0.024 - 0.024 - \frac{8}{3} \times 0.400 = -1.097 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\begin{aligned} a_P &= -a_{WW} - a_W - a_E - a_{EE} + F_e - F_w - R_P \\ &= -0 - 0 + 0.524 - 0 + 0.024 - 0.024 + 1.097 = 1.621 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_u &= \left(\frac{2}{8} F_e + F_w + \frac{8}{3} D_w \right) \phi_w = \left(\frac{2}{8} \times 0.024 + 0.024 + \frac{8}{3} \times 0.400 \right) \times 100 \\ &= 109.667 \text{ ppm m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 1 adalah

$$cv \ 1 : (1.621) \phi_P + (-0.524) \phi_E = 109.667$$

Volume kontrol 2. Memperhatikan persamaan yang dipakai untuk menghitung nilai ϕ di sisi timur volume kontrol 1, maka persamaan yang sama harus dipakai untuk menghitung nilai ϕ di sisi kiri (barat) volume kontrol 2 dalam menghitung fluks konvektif. Oleh karena itu, persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 2 adalah

$$\begin{aligned} & \left[F_e \left(\frac{6}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_E - \frac{1}{8} \phi_W \right) - F_w \left(\frac{7}{8} \phi_W + \frac{3}{8} \phi_P - \frac{2}{8} \phi_w \right) \right] - [D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)] \\ & = 0 \end{aligned}$$

Dengan pengaturan koefisien, maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{8}F_e - \frac{7}{8}F_w - D_w\right)\phi_w \\ & + \left[\left(\frac{1}{8}F_e + \frac{7}{8}F_w + D_w\right) - \left(\frac{3}{8}F_e - D_e\right) + \left(\frac{3}{8}F_e - D_e\right) - (F_e - F_w) - \left(\frac{2}{8}F_w\right)\right]\phi_p + \left(\frac{3}{8}F_e - D_e\right)\phi_E = -\frac{2}{8}F_w\phi_w \end{aligned}$$

yang dapat dituliskan dalam bentuk baku persamaan diskret transpor konvektif-difusif berikut.

$$a_{WW}\phi_{WW} + a_W\phi_W + a_P\phi_P + a_E\phi_E + a_{EE}\phi_{EE} = R_u$$

Koefisien-koefisien dalam persamaan di atas adalah

$$a_{WW} = 0$$

$$a_W = -\frac{1}{8}F_e - \frac{7}{8}F_w - D_w = -\frac{1}{8} \times 0.024 - \frac{7}{8} \times 0.024 - 0.400 = -0.424 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_E = \frac{3}{8}F_e - D_e = \frac{3}{8} \times 0.024 - 0.400 = -0.391 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_{EE} = 0$$

$$R_p = \frac{2}{8}F_e = \frac{2}{8} \times 0.024 = 0.006 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\begin{aligned} a_P &= -a_{WW} - a_W - a_E - a_{EE} + F_e - F_w - R_p \\ &= -0 + 0.424 + 0.391 - 0 + 0.024 - 0.024 + 0.006 = 0.809 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$R_u = -\frac{2}{8}F_w\phi_w = -\frac{2}{8} \times 0.024 \times 100 = -0.600 \text{ ppm m}^3/\text{s}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 2 adalah

$$cv \ 2: \quad (-0.424)\phi_W + (0.809)\phi_P + (-0.391)\phi_E = -0.600$$

Volume kontrol 7. Sisi kanan (timur) volume kontrol ini berimpit dengan batas domain hitung. Di tempat ini, konsentrasi polutan diketahui, yaitu $\phi_e = 25 \text{ ppm}$. Fluks difusif di batas timur volume kontrol 7 dinyatakan dengan persamaan

$$\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e = \frac{D_e}{3} (8\phi_e - 9\phi_P + \phi_W)$$

Dengan demikian, persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7 adalah

$$\left[F_e\phi_e - F_w \left(\frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW} \right) \right] - \left[\frac{D_e}{3} (8\phi_e - 9\phi_P + \phi_W) - D_w(\phi_P - \phi_W) \right] = 0$$

Dengan memindahkan suku-suku yang nilainya diketahui ke sisi kanan tanda kesamaan, maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{8}F_w\right)\phi_{WW} + \left(-\frac{6}{8}F_w - \frac{1}{3}D_e - D_w\right)\phi_W \\ & + \left[\left(\frac{1}{8}F_w\right) - \left(-\frac{6}{8}F_w - \frac{1}{3}D_e - D_w\right) + F_e - F_w - \left(F_e + \frac{8}{3}D_e\right)\right]\phi_P \\ & = \left(-F_B + \frac{8}{3}D_e\right)\phi_e \end{aligned}$$

yang dapat dituliskan dalam bentuk baku persamaan diskret transpor konvektif-difusif

$$a_{WW}\phi_{WW} + a_W\phi_W + a_P\phi_P + a_E\phi_E + a_{EE}\phi_{EE} = R_u$$

Dalam hal ini $\phi_e = 25$ ppm, $F_e = 0.024$ m³/s, $D_w = 0.400$ m³/s, dan koefisien-koefisien dalam persamaan di atas adalah

$$a_{WW} = \frac{1}{8}F_w = \frac{1}{8} \times 0.024 = 0.003 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_W = -\frac{6}{8}F_w - \frac{1}{3}D_e - D_w = -\frac{6}{8} \times 0.024 - \frac{1}{3} \times 0.400 - 0.400 = -0.551 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_E = 0$$

$$a_{EE} = 0$$

$$R_P = F_e - \frac{8}{3}D_e = 0.024 - \frac{8}{3} \times 0.400 = -1.043 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\begin{aligned} a_P &= -a_{WW} - a_W - a_E - a_{EE} + F_e - F_w - R_P \\ &= 0.003 + 0.551 - 0 - 0 + 0.024 - 0.024 + 1.043 = 1.591 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$R_u = \left(-F_e + \frac{8}{3}D_e\right)\phi_e = \left(-0.024 + \frac{8}{3} \times 0.400\right) \times 25 = 26.067 \text{ ppm m}^3/\text{s}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di volume kontrol 7 adalah

$$cv \ 7: \ (0.003)\phi_{WW} + (-0.551)\phi_W + (1.591)\phi_P = 26.067$$

Di bawah ini adalah tujuh persamaan di semua volume kontrol yang disusun dengan penerapan QUICK *scheme*.

$$\begin{bmatrix} 1.621 & -0.524 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.424 & 0.809 & -0.391 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.003 & -0.421 & 0.812 & -0.394 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.003 & -0.421 & 0.812 & -0.394 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.003 & -0.421 & 0.812 & -0.394 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.003 & -0.421 & 0.812 & -0.394 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & -0.551 & 1.591 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 109.667 \\ -0.600 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 26.067 \end{Bmatrix}$$

Penyelesaian sistem persamaan di semua volume kontrol di atas, yang dilakukan dengan bantuan *spreadsheet* untuk melakukan hitungan inversi matriks dan perkalian matriks, memberikan konsentrasi polutan dalam satuan ppm di setiap volume kontrol dengan nilai

96.07

87.86

79.14
69.22
58.10
45.77
32.24

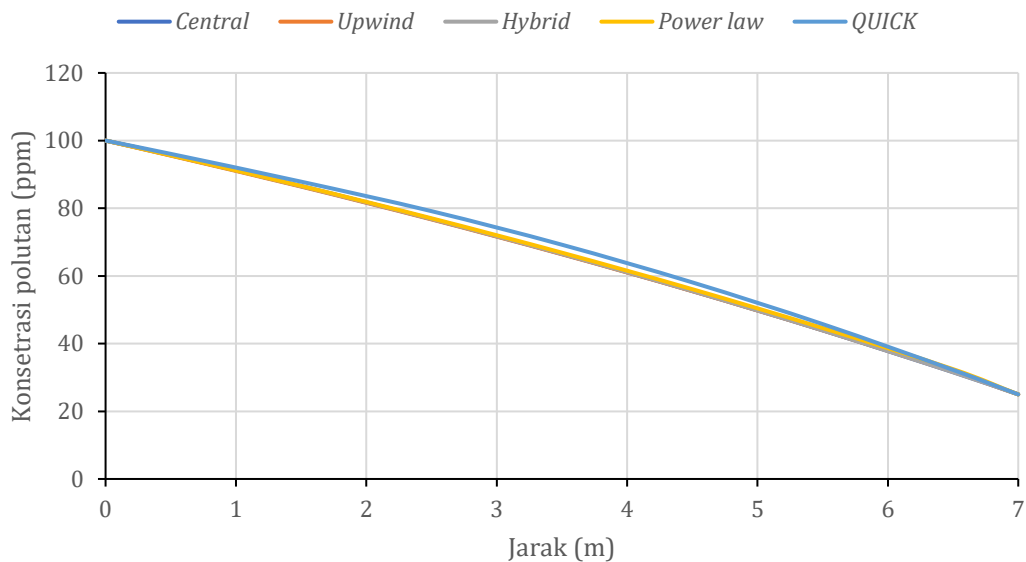
3.2.7 Perbandingan Hasil Hitungan Berbagai Skema Penyelesaian

Tabel 3.3 menyajikan konsentrasi polutan di sepanjang *flume* yang diperoleh dari penyelesaian numeris persamaan transpor konvektif-difusif menurut berbagai skema penyelesaian metode volume hingga. Gambar 3.27 menampilkan profil konsentrasi polutan di sepanjang *flume*. Tampak bahwa kelima skema memberikan hasil yang hampir sama.

Tabel 3.3 Konsentrasi polutan dalam satuan ppm di sepanjang *flume* yang dihitung dengan berbagai skema volume hingga

Titik hitung	Skema volume hingga				
	<i>Central</i>	<i>Upwind</i>	<i>Hybrid</i>	<i>Power law</i>	<i>QUICK</i>
ϕ_1	95.69	95.56	95.69	95.63	96.07
ϕ_2	86.54	86.40	86.54	86.61	87.86
ϕ_3	76.82	76.70	76.82	77.04	79.14
ϕ_4	66.50	66.41	66.50	66.88	69.22
ϕ_5	55.55	55.50	55.55	56.08	58.10
ϕ_6	43.91	43.95	43.91	44.62	45.77
ϕ_7	31.56	31.69	31.56	32.45	32.24

Catatan: ϕ dalam satuan ppm.



Gambar 3.27 Profil konsentrasi polutan yang diperoleh dari penyelesaian numerik persamaan transpor konvektif-difusif dengan berbagai skema volume hingga

Pustaka Acuan

Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York

Ferziger, J. H., and Peric, M., 1997, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

Versteeg, H. K., and Malalasekera, W., 1995, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method*, Longman Group, Essex, England.