PENYELESAIAN SOAL UJIAN TENGAH SEMESTER 2007

SOAL A

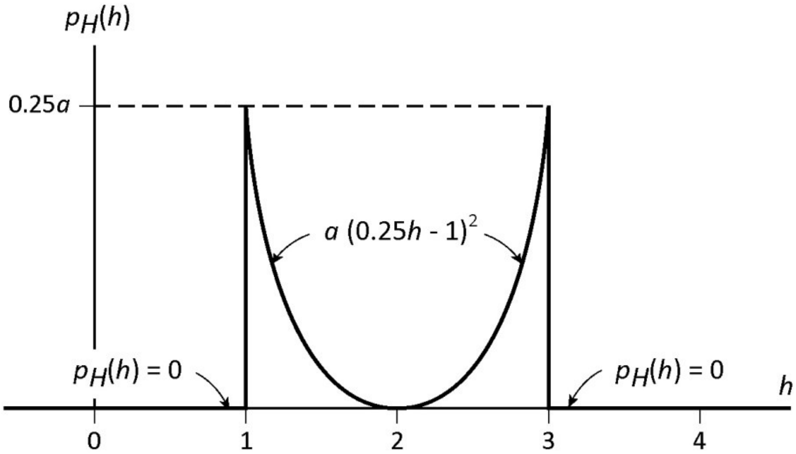
Elevasi muka air di suatu reservoir dinyatakan dengan variabel (random kontinyu) *H* m yang memiliki fungsi probabilitas (*probability density function*, pdf) menurut persamaan berikut:

$$p_H(h) = a(0.5h - 1)^2 \qquad \text{jika } 1 \le h \le 3$$
$$= 0 \qquad \text{untuk nilai } h \text{ yang lain}$$

1. Gambarkan sketsa pdf elevasi muka air tersebut.
2. Carilah konstanta *a*.
3. Carilah fungsi distribusi kumulatif *H*.
4. Hitunglah probabilitas muka air melampaui elevasi 2.5 m.
5. Hitunglah elevasi muka air rata-rata di reservoir.

PENYELESAIAN

Persamaan pdf menunjukkan bahwa konstanta *a* bernilai positif; kurva pdf berbentuk parabola dengan puncak di bawah (kurva membuka ke atas), yaitu $p_H(2) = 0$.



Konstanta *a*.

Nilai kontanta *a* dapat dicari dengan memperhatikan bahwa luas di bawah kurva pdf bernilai 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_H(h)\,\mathrm{d}h = 1$$

$$\int_{-\infty}^{1} p_H(h)\,\mathrm{d}h + \int_{1}^{3} p_H(h)\,\mathrm{d}h + \int_{3}^{+\infty} p_H(h)\,\mathrm{d}h = 1$$

$$0+\int_1^3 a(0.5h-1)^2\,\mathrm{d}h+0=1$$

$$\int_1^3 a\left(0.25h^2-h+1\right)\mathrm{d}h=1$$

$$a\left[\frac{1}{12}h^3-\frac{1}{2}h^2+h\right]_1^3=1$$

$$a\left[\frac{1}{12}(27-1)-\frac{1}{2}(9-1)+(3-1)\right]=1 \;\Rightarrow\; a=6$$

Cumulative distribution function, cdf.

$$P_H(h)=\int p_H(h)\,\mathrm{d}h$$

Memperhatikan bentuk persamaan pdf serta sketsa kurva pdf tersebut, tampak bahwa cdf harus dicari untuk tiga rentang nilai h, yaitu $-\infty < h < 1$, $1 < h < 3$, serta $3 < h < \infty$.

<u>Untuk $-\infty < h < 1$.</u>

$$P_H(h)=\int 0\,\mathrm{d}h=C$$

Syarat batas: $P_H(-\infty) = 0$, $P_H(1) = 0$

Jadi $C = 0$, sehingga $P_H(h) = 0$

<u>Untuk $1 < h < 3$.</u>

$$P_H(h)=\int 6\left(0.25h^2-h+1\right)\mathrm{d}h$$

$$=6\left(\frac{1}{12}h^3-\frac{1}{2}h^2+h+C\right)$$

Syarat batas: $P_H(1) = 0$, $P_H(3) = 1$.

$$P_H(1)=6\left(\frac{1}{12}1^3-\frac{1}{2}1^2+1+C\right)$$

$$0=\frac{6}{12}(1-6+12+12C) \;\Rightarrow\; C=-\frac{7}{12}$$

atau

$$P_H(3)=6\left(\frac{1}{12}3^3-\frac{1}{2}3^2+3+C\right)$$

$$1=6\left(\frac{1}{12}27-\frac{1}{2}9+3+C\right)$$

$$1=\frac{6}{12}(27-54+36+12C) \;\Rightarrow\; C=-\frac{7}{12}$$

Dengan demikian, $P_H(h)=6\left(\frac{1}{12}h^3-\frac{1}{2}h^2+h-\frac{7}{12}\right)$.

Untuk $3 < h < \infty$.

$$P_H(h) = \int 0 \, \mathrm{d}h = C$$

Syarat batas: $P_H(3) = 1$, $P_H(+\infty) = 1$

Jadi $C = 1$, sehingga $P_H(h) = 1$

Dengan demikian, cdf elevasi muka air di reservoir tersebut adalah:

$$\begin{aligned} P_H(h) &= 0 && \text{untuk } h < 1 \\ &= 6\left(\frac{1}{12}h^3 - \frac{1}{2}h^2 + h - \frac{7}{12}\right) && \text{untuk } 1 \le h \le 3 \\ &= 1 && \text{untuk } h > 3 \end{aligned}$$

Probabilitas elevasi muka air melampaui 2.5 m.

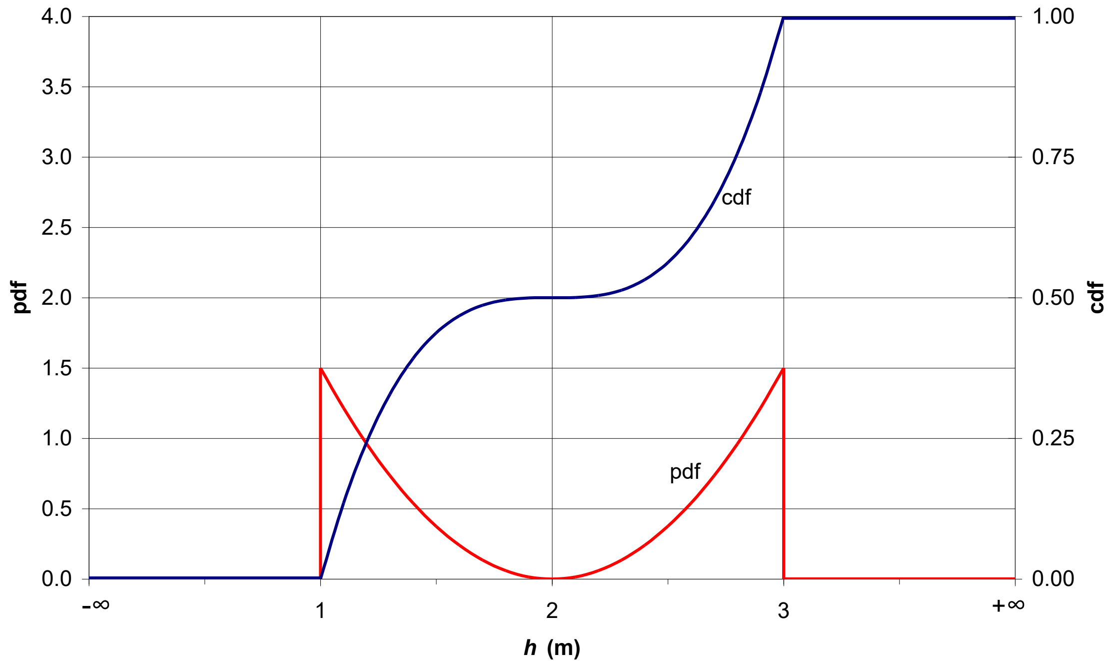
$$\begin{aligned} \text{prob}(h > 2.5) &= 1 - \text{prob}(h < 2.5) \\ &= 1 - P_H(2.5) \\ &= 1 - 6\left(\frac{1}{12}2.5^3 - \frac{1}{2}2.5^2 + 2.5 - \frac{7}{12}\right) \\ &= 43.75\% \end{aligned}$$

Elevasi muka air rata-rata.

Elevasi muka air rata-rata dapat dilihat langsung pada sketsa pdf. Tampak bahwa elevasi muka air rata-rata adalah $h = 2$ m.

Elevasi muka air rata-rata dapat pula dihitung dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \int_{-\infty}^{+\infty} h \, p_H(h) \mathrm{d}h \\ &= 0 + \int_1^3 6h\left(0.25h^2 - h + 1\right)\mathrm{d}h + 0 \\ &= \int_1^3 6\left(0.25h^3 - h^2 + h\right)\mathrm{d}h \\ &= 6\left[\frac{1}{16}h^4 - \frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{2}h^2\right]_1^3 \\ &= 6\left[\frac{1}{16}(81-1) - \frac{1}{3}(27-1) + \frac{1}{2}(9-1)\right] = 2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$



SOAL B

Untuk melindungi suatu *construction site* (pekerjaan akan berlangsung 5 tahun), diperlukan *cofferdam*. Debit kala-ulang 25 tahun ditetapkan sebagai dasar perancangan *cofferdam* tersebut.

1. Hitung risiko debit rancangan terlampaui sebelum pekerjaan di *construction site* selesai.
2. Hitunglah probabilitas *cofferdam* jebol untuk pertama kalinya pada tahun ke-6 (dalam tahun pertama setelah pekerjaan di *construction site* selesai).

PENYELESAIAN

Setiap tahun, risiko debit melampaui debit rancangan adalah prob($Q > Q_{25}$) = 0.04. Jika risiko tersebut adalah p, maka peluang debit tidak melampaui debit rancangan adalah $q = 1 - p$ = 0.96.

Risiko debit rancangan terlampaui sebelum perkerjaan selesai.

Risiko limpasan dalam masa pekerjaan 5 tahun ke depan dapat diperkirakan dengan menghitung terlebih dulu peluang tidak terjadi limpasan selama periode tersebut, yaitu:

$$f_X(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x\, q^{n-x}$$

Persamaan di atas adalah persamaan distribusi binomial. Dalam persamaan tersebut, x = 0 adalah frekuensi limpasan dan n = 5 adalah periode 5 tahun ke depan.

$$f_X(0;5,0.04) = \binom{5}{0} 0.04^0\, 0.96^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0.96^5 = 0.8154 \approx 81.5\%$$

Risiko terjadi limpasan dalam 5 tahun ke depan adalah (1 – peluang tidak terjadi limpasan dalam periode yang sama) atau 1 – 81.5% = 18.5%.

Ditinjau dari sudut pandang probabilitas, risiko limpasan dalam 5 tahun ke depan adalah risiko terjadi limpasan setidaknya satu kali dalam 5 tahun ke depan; artinya, limpasan dapat terjadi satu, dua, tiga, empat, atau lima kali. Namun, dalam perspektif fungsi *cofferdam*, sekali limpasan terjadi, *cofferdam* akan rusak. Dengan kata lain, secara fisik, *cofferdam* tidak berfungsi lagi setelah limpasan terjadi satu kali.

Probabilitas *cofferdam* jebol untuk pertama kalinya pada tahun ke-6 (dalam tahun pertama setelah pekerjaan di *construction site* selesai).

Terjadi limpasan pertama kalinya pada tahun keenam dapat dilihat sebagai tidak terjadi limpasan selama lima tahun dan terjadi limpasan pada tahun keenam; probabilitas peristiwa seperti ini terjadi adalah $p\,q^5$ = 0.04 (81.5%) = 3.26%.

Probabilitas terjadi limpasan pertama kalinya pada tahun keenam dapat dipandang sebagai distribusi geometris pada proses Bernoulli:

$$f_X(x;p) = p \cdot q^{x-1}$$

Dalam persamaan di atas, x = 6 adalah tahun saat limpasan pertama kalinya terjadi. Dengan demikian probabilitas terjadi limpasan pertama kalinya terjadi pada tahun keenam adalah:

$$f_X(6;0.04) = 0.04 \cdot 0.96^{6-1} = 0.04 \cdot 0.96^5 = 0.0326 = 3.26\% .$$

SOAL C

Debit maximum tahunan di suatu titik kontrol Sungai X disajikan pada tabel di bawah ini. Debit tersebut dapat dianggap berdistribusi normal.

1986-1995	2000	1740	1460	2060	1530	1590	1690	1420	1330	607
1996-2005	2290	2590	2060	2490	2080	2520	1360	2020	1810	1380

1. Apabila dapat dianggap bahwa:
   i) debit maximum rata-rata dan simpangan baku data tersebut mendekati nilai populasi,
   ii) simpangan baku populasi 1986-1995 dan 1996-2005 sama dengan simpangan baku populasi, dan
   iii) simpangan baku populasi selama 1996-2005 sama dengan simpangan baku populasi selama 1986-1995,

   buktikan bahwa telah terjadi peningkatan debit maximum tahunan pada periode 1996-2005 dibandingkan debit maximum periode 1985-1996.

1. Jika simpangan baku populasi tidak diketahui, susunlah hipotesis tentang peningkatan debit maximum pada soal di atas.
2. Jika varian populasi tidak diketahui, namun diketahui bahwa varian debit maximum pada kedua periode tidak sama, susunlah hipotesis yang baru tentang peningkatan debit maximum pada soal di atas.

PENYELESAIAN

Soal ini mirip dengan Soal C UAS 2004.

Dari sampel data debit maximum tahunan dapat dihitung parameter statistik sebagai berikut:

	1986-1995	1996-2005	1986-2005
jumlah sampel, n	10	10	20
nilai rata-rata, $\overline{Q}$ m^3/s	1543	2060	1801
simpangan baku, s_Q m^3/s	406	441	490

Apakah telah terjadi peningkatan debit maximum (debit maximum periode 1986-1995 lebih besar daripada debit maximum periode 1996-2005)?

Dengan asumsi bahwa debit rata-rata dan simpangan baku seluruh data (1986-2005) mendekati nilai populasinya, maka: μ = 1801 m^3/s dan σ = 490 m^3/s.

Di sini, ingin diuji jika debit maximum periode 1996-2005 lebih besar daripada debit maximum seluruh populasi, μ_2 > 1801 m^3/s. Untuk keperluan ini, dilakukan uji satu sisi (*one-tailed test*).

Dari data debit selama periode 1996-2005 dengan n =10, diperoleh $\overline{Q_2}$ = 2060 m^3/s. Apabila debit maximum tahunan tersebut dianggap berdistribusi normal, maka statistik ujinya adalah:

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{Q}_2 - \mu\right).$$

Uji hipotesisnya adalah:

H_0: μ_2 = 1801 m^3/s

H_a: μ_2 > 1801 m^3/s

Untuk tingkat keyakinan $(1-\alpha)$ = 95% ($z_{1-\alpha}$ = 1.64), maka H_0 ditolak jika $z > z_{1-\alpha}$.

$$z = \frac{\sqrt{10}}{490}\left(2060 - 1801\right) = 1.67\,.$$

Karena $z > z_{1-\alpha}$, maka H_0 ditolak, yang berarti bahwa μ_2 tidak sama dengan 1801 m^3/s, namun lebih besar daripada 1801 m^3/s. Ini menunjukkan bahwa telah terjadi peningkatan debit maximum pada periode 1996-2005.

Pertanyaan yang sama, namun dianggap nilai simpangan baku populasi tidak diketahui.

Uji hipotesis untuk melihat adanya peningkatan debit maximum pada periode 1996-2005 jika nilai simpangan baku populasi tidak diketahui adalah:

H_0: μ_2 = 1801 m^3/s

H_a: μ_2 > 1801 m^3/s

dengan statistik uji $T = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{Q}_2 - \mu\right)$.

Untuk n = 10, σ = 490 m^3/s, $\overline{Q}_2 = 2060$ m^3/s, dan μ = 1801 m^3/s, diperoleh *t score*:

$$t = \frac{\sqrt{10}}{490}(2060 - 1801) = 1.67\ .$$

Dengan tingkat keyakinan $(1 - \alpha)$ = 95%, diperoleh $t_{1-\alpha}$ = 0.06. Karena $t > t_{1-\alpha}$, maka H_0 ditolak, yang menunjukkan bahwa telah terjadi peningkatan debit maximum tahunan pada periode 1996-2005.

Pertanyaan yang sama, namun dianggap nilai keragaman populasi tidak diketahui dan nilai keragaman pada kedua periode tidak sama.

Uji hipotesis untuk melihat adanya peningkatan debit maximum pada periode 1996-2005 jika nilai keragaman populasi tidak diketahui dan nilai keragaman pada kedua periode data tidak sama adalah:

H_0: $\mu_2 = \mu_1$

H_a: $\mu_2 > \mu_1$

dengan statistik uji $T = \frac{\left(\overline{Q}_2 - \overline{Q}_1\right) - \left(\mu_2 - \mu_1\right)}{\sqrt{{s_{Q_2}}^2 / n_2 + {s_{Q_1}}^2 / n_1}}$ yang berdistribusi mendekati distribusi Student's t

dengan ν *degrees of freedom* yang dinyatakan dengan persamaan:

$$\nu = \frac{\left({s_{Q_2}}^2 / n_2 + {s_{Q_1}}^2 / n_1\right)^2}{\frac{\left({s_{Q_2}}^2 / n_2\right)^2}{n_2 - 1} + \frac{\left({s_{Q_1}}^2 / n_1\right)^2}{n_1 - 1}}$$

Dari data debit maximum tahunan, diketahui:

$$\begin{array}{ll}
n_1 = 10 & n_2 = 10 \\
\overline{Q}_1 = 1543\,\mathrm{m^3/s} & \overline{Q}_2 = 2060\,\mathrm{m^3/s} \\
s_{Q_1} = 406\,\mathrm{m^3/s} & s_{Q_2} = 441\,\mathrm{m^3/s}
\end{array}$$

sehingga diperoleh $\nu \approx 18$ dan t = 2.73.

Apabila dipakai tingkat keyakinan $(1 - \alpha)$ = 95%, diperoleh $t_{1-\alpha}$ = 0.06. Karena $t > t_{1-\alpha}$, maka H_0 ditolak, yang menunjukkan bahwa telah terjadi peningkatan debit maximum tahunan pada periode 1996-2005.

Catatan.

Nilai z dan t untuk nilai tingkat keyakinan $(1 - \alpha)$ yang diketahui atau ditetapkan dapat diperoleh dari tabel distribusi normal standar atau tabel distribusi Student's t. Nilai-nilai ini dapat pula dihitung dengan bantuan MSExcel. Perintah MSExcel untuk menghitung nilai z untuk nilai $(1 - \alpha)$ yang diketahui adalah =**NORMSINV**(*probability*). Di sini, *probability* adalah peluang kejadian untuk sampel atau populasi yang berdistribusi normal, yang dalam hal ini adalah $(1 - \alpha)$.

=NORMSINV(0.95)

=1.64.

Perintah MSExcel untuk menghitung nilai *t* untuk nilai $(1 - \alpha)$ yang diketahui adalah =**TINV**(*probability*,*degrees_of_freedom*). Di sini, *probability* adalah peluang kejadian untuk sampel berdistribusi Student's t dua sisi (*two-tailed Student's t-distribution*).

=**TINV**(0.95,10)

=0.06.

-o0o-