PENYELESAIAN SOAL UJIAN TENGAH SEMESTER 2010

SOAL A

Pengolahan data *annual series* curah hujan harian maximum, H mm, di suatu stasiun ARR menunjukkan bahwa sebaran probabilitas suatu besaran curah hujan, $p_H(h)$, dapat dinyatakan dengan suatu fungsi (pdf) berikut:

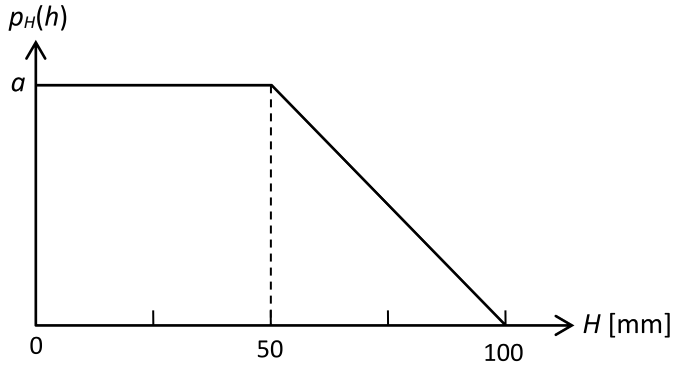
$$
\begin{aligned}
p_H(h) &= a && \text{jika} \quad 0 \le h < 50 \\
&= \frac{a}{50}(100 - h) && \text{jika} \quad 50 \le h < 100 \\
&= 0 && \text{untuk nilai } h \text{ yang lain}
\end{aligned}
$$

1. Gambarkan pdf curah hujan harian maximum di stasiun tersebut.
2. Hitung konstanta a.
3. Cari dan gambarkan fungsi distribusi kumulatif (cdf) curah hujan harian maximum H.
4. Hitung nilai rata-rata curah hujan harian maximum, $\overline{H}$, di stasiun tersebut.
5. Hitung nilai simpangan baku curah hujan harian maximum, s_H, di stasiun tersebut.
6. Hitung probabilitas curah hujan harian maximum antara 40 mm s.d. 60 mm, prob(40 mm < H < 60 mm).
7. Jika pdf dan cdf di atas dapat dianggap tetap (konstan), hitung probabilitas curah hujan tidak akan pernah melampaui 70 mm dalam kurun 10 tahun ke depan.

PENYELESAIAN

Sketsa pdf

Probability density function, pdf, data curah hujan harian maximum dalam soal tersebut dapat lebih mudah difahami dengan menampilkannya dalam bentuk grafik.



Konstanta a

Nilai kontanta a dicari dari definisi bahwa luas di bawah kurva pdf merupakan probabilitas (peluang) seluruh curah hujan di stasiun tersebut; jadi luas di bawah kurva pdf sama dengan satu.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_H(h)\,\mathrm{d}h = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}h + \int_{0}^{50} a\,\mathrm{d}h + \int_{50}^{100} \frac{a}{50}(100-h)\,\mathrm{d}h + \int_{0}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}h = 1$$

$$0 + a(50-0) + \frac{1}{50}a\left[\left(100\times100-\tfrac{1}{2}\times100\times100\right)-\left(100\times50-\tfrac{1}{2}\times50\times50\right)\right]+0=1$$

$$(50+25)a = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{75}$$

Tentu saja, luas di bawah kurva pdf di atas dapat pula dihitung dengan cara yang lebih mudah, yaitu dengan memperhatikan trapesium yang dibentuk oleh salib sumbu dan kurva pdf.

Luas trapesium = 1

$$\frac{100+50}{2}a = 1 \quad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{75}$$

Fungsi distribusi kumulatif, cdf

$$P_H(h) = \mathrm{prob}(H < h) = \int p_H(h)\,\mathrm{d}h$$

<u>Interval $h \leq 0$</u>

$$P_H(h) = 0$$

<u>Interval $0 \leq h \leq 50$ mm</u>

$$P_H(h) = \int \frac{1}{75}\,\mathrm{d}h = \frac{1}{75}h + C_1$$

Syarat batas: $P_H(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$P_H(h) = \frac{1}{75}h$$

$$P_H(50) = \frac{1}{75}50 = \frac{2}{3}$$

<u>Interval 50 mm $\leq h \leq$ 100 mm</u>

$$P_H(h) = \int \frac{1}{75\times50}(100-h)\,\mathrm{d}h = \frac{1}{75\times50}\left(100h-\tfrac{1}{2}h^2\right)+C_2 = \frac{1}{75\times100}\left(200h-h^2\right)+C_2$$

Syarat batas: $P_H(100) = 1 \Rightarrow$

$$1 = \frac{1}{75\times100}(200\times100-100\times100)+C_2$$

$$C_2 = 1-\frac{100}{75} = -\frac{1}{3}$$

$$P_H(h)=\frac{1}{75\times100}\left(200h-h^2\right)-\frac{1}{3}$$

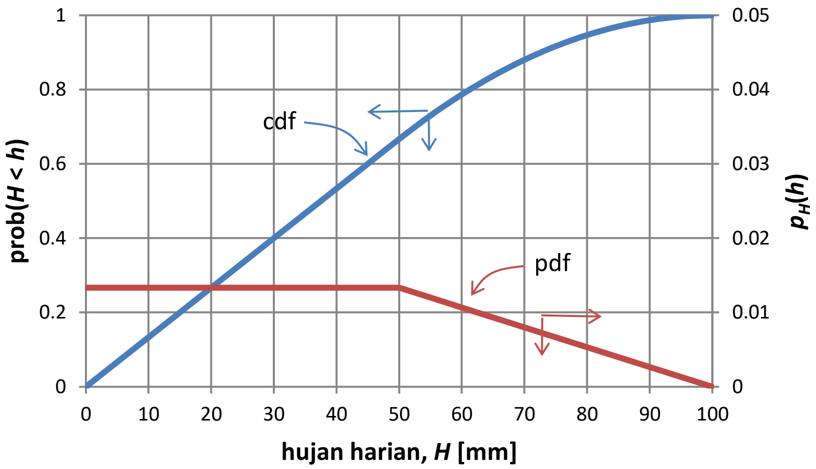
$$P_H(h)=\frac{1}{75\times100}\left(200h-h^2-2500\right)$$

Interval $h \geq 100$ mm

$$P_H(h)=1$$

Persamaan pdf dan cdf curah hujan harian maximum.

Curah hujan harian H [mm]	pdf	cdf
$h \leq 0$	$p_H(h)=0$	$P_H(h)=0$
$0 \leq h \leq 50$ mm	$p_H(h)=\frac{1}{75}$	$P_H(h)=\frac{1}{75}h$
50 mm $\leq h \leq$ 100 mm	$p_H(h)=\frac{1}{75\times50}(100-h)$	$P_H(h)=\frac{1}{75\times100}\left(200h-h^2-2500\right)$
$h \geq$ 100 mm	$p_H(h)=0$	$P_H(h)=1$



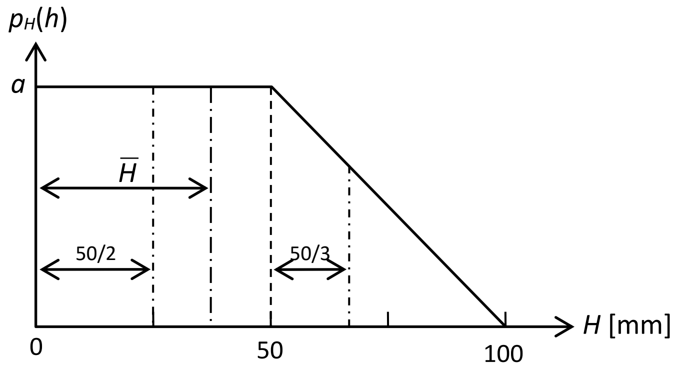
Curah hujan rata-rata

Curah hujan rata-rata merupakan nilai expektasi curah hujan, E(H), yang merupakan momen pertama terhadap sumbu ordinat pada pdf.

Memperhatikan bentuk geometri pdf yang berupa trapesium, maka momen pertama terhadap sumbu ordinat pdf dapat dihitung dengan cara sebagai berikut (lihat sketsa pada gambar di bawah):

$$\left[\tfrac{1}{2}\times(100+50)\times\frac{1}{75}\right]\overline{H}=\left(50\times\frac{1}{75}\right)\times\frac{50}{2}+\left(\tfrac{1}{2}\times50\times\frac{1}{75}\right)\times\left(50+\frac{50}{3}\right)$$

$$\overline{H}=\frac{350}{9}\approx 39\,\text{mm}$$



Momen pertama terhadap sumbu ordinat dapat dihitung pula dengan cara sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(H) &= \int h\,p_H(h)\,\mathrm{d}h = \int_0^{50} \frac{1}{75} h\,\mathrm{d}h + \int_{50}^{100} \frac{1}{75\times 50}\left(100h - h^2\right)\mathrm{d}h \\
&= \left[\frac{1}{75\times 2} h^2\right]_0^{50} + \left[\frac{1}{75\times 50}\left(\frac{100}{2}h^2 - \frac{1}{3}h^3\right)\right]_{50}^{100} \\
&= \left[\frac{1}{75\times 2}\left(50^2 - 0\right)\right] + \left[\frac{1}{75\times 50}\left(\frac{100\times 100^2}{2} - \frac{100\times 50^2}{2}\right) - \frac{1}{75\times 50}\left(\frac{100^3}{3} - \frac{50^3}{3}\right)\right] \\
&= \frac{50}{3} + \frac{1}{75\times 50}\left(\frac{200\times 50^2}{6}\right) \\
&= \frac{50}{3}\left(1 + \frac{8}{6}\right) \\
&= \frac{700}{18} \\
&\approx 39 \text{ mm}
\end{aligned}
$$

Simpangan baku curah hujan

Simpangan baku curah hujan, s_H, merupakan akar kuadrat varian. Nilai varian dihitung sebagai nilai momen kedua terhadap nilai rata-rata:

$$
\mathrm{var}(H) = \mathrm{E}\left[\left(H - \overline{H}\right)^2\right] = \mathrm{E}\left(H^2\right) - \mathrm{E}^2(H)
$$

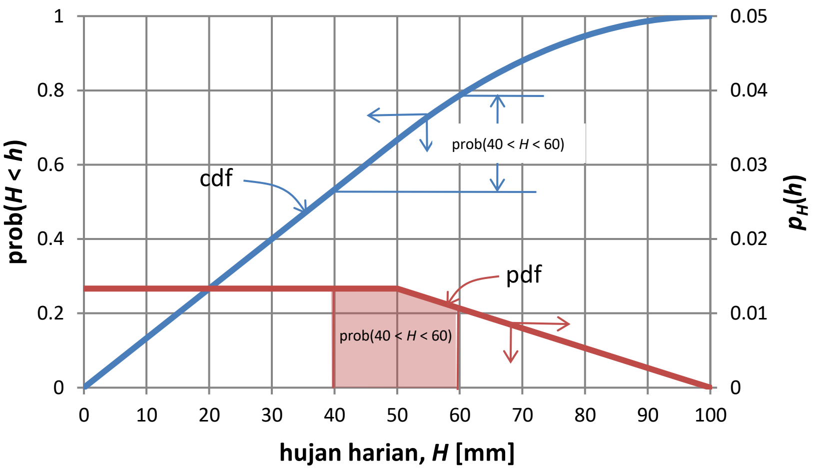
$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(H^2\right) &= \int h^2 p_H(h)\,\mathrm{d}h = \int_0^{50} \frac{1}{75} h^2 p_H(h)\,\mathrm{d}h + \int_{50}^{100} \frac{1}{75\times 50}\left(100h^2 - h^3\right)\mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{75}\left(\frac{50^3}{3}\right) + \frac{1}{75\times 50}\left[\frac{100}{3}\left(100^3 - 50^3\right) - \frac{1}{4}\left(100^4 - 50^4\right)\right] \\
&= \frac{1}{75}\left(\frac{50^3}{3}\right) + \frac{1}{75\times 50}\left[\frac{1}{3}100^4 - \frac{2}{3}50^4 - \frac{1}{4}100^4 + \frac{1}{4}50^4\right] \\
&= \frac{1}{75}\left[\frac{1}{3}50^3 + \frac{16}{3}50^3 - \frac{2}{3}50^3 - \frac{16}{4}50^3 + \frac{1}{4}50^3\right] \\
&= \frac{1}{75}\left[\frac{15}{3}50^3 - \frac{15}{4}50^3\right] = \frac{50^3}{60}
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{var}(H) = \frac{50^3}{60} - \left(\frac{700}{18}\right)^2 = 570.9877 \text{ mm}^2$$

$$\begin{aligned} s_H &= \sqrt{570.9877} \\ &= 23.8954 \\ &\approx 24 \text{ mm} \end{aligned}$$

Probabilitas curah hujan antara 40 s.d. 60 mm

$$\begin{aligned} \mathrm{prob}(40 < H < 60) &= \mathrm{prob}(H < 60) - \mathrm{prob}(H < 40) \\ &= P_H(60) - P_H(40) \\ &= \frac{1}{75 \times 100}\left(200 \times 60 - 60^2 - 2500\right) - \frac{1}{75}(40) \\ &= \frac{1}{75}(120 - 36 - 25 - 40) \\ &= \frac{19}{75} \\ &\approx 0.25 \end{aligned}$$



Probabilitas curah hujan tidak akan pernah melampaui 70 mm dalam kurun 10 tahun ke depan

Dengan asumsi bahwa pdf dan cdf bersifat konstan, maka probabilitas curah hujan tidak melampaui 70 mm dalam kurun 10 tahun dapat dihitung memakai persamaan distribusi binomial:

$$f_X(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Persamaan di atas menyatakan frekuensi terjadi curah hujan melebihi 70 mm sejumlah *x* kali dalam kurun *n* tahun apabila probabilitas curah hujan melebihi 70 mm per tahun adalah *p*. Probabilitas curah hujan melebihi 70 mm, *p*, adalah:

$$
\begin{aligned}
p &= 1 - P_H(70) \\
&= 1 - \frac{1}{75 \times 100}\left(200 \times 70 - 70^2 - 2500\right) \\
&= 1 - \frac{66}{75} \\
&= \frac{9}{75} = \frac{3}{25} \\
&= 0.12
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, probabilitas curah hujan tidak pernah melampaui 70 mm dalam kurun 10 tahun adalah:

$$
\begin{aligned}
f_X(0;10,0.12) &= \binom{10}{0} 0.12^0 (1 - 0.12)^{10-0} \\
&= 1 \times 1 \times 0.88^{10} \\
&= 0.2785
\end{aligned}
$$

SOAL B

Pengukuran evaporasi harian (dalam mm) selama 40 hari dari suatu stasiun menunjukkan nilai evaporasi harian sebagai berikut:

3	8	12	9	9	11	4	9	7	1
8	11	5	13	11	11	10	11	7	9
8	15	8	7	10	5	7	6	9	10
13	11	7	10	13	13	5	10	12	15

1. Buatlah tabel frekuensi dan histogram (frekuensi, <u>bukan frekuensi relatif</u>) data evaporasi harian tersebut. Lebar klas 2 mm dengan batas bawah klas pertama 0 mm (rentang klas pertama 0 - 2 mm).
2. Hitunglah nilai rata-rata dan simpangan baku evaporasi harian tersebut. ***Bulatkan kedua nilai kedalam milimeter terdekat***.
3. Hitunglah frekuensi (<u>bukan frekuensi relatif</u>) data evaporasi harian dalam setiap klas data menurut distribusi normal.
4. Buatlah gambar perbandingan antara frekuensi data dan frekuensi teoretik menurut distribusi normal (<u>bukan frekuensi relatif</u>).
5. Hitunglah rentang keyakinan nilai rata-rata evaporasi harian dengan tingkat keyakinan 90%.
6. Hitunglah tingkat keyakinan yang dimiliki seseorang yang menyatakan bahwa nilai rata-rata evaporasi harian adalah antara 8 mm s.d. 11 mm.
7. Lakukan uji hipotesis bahwa nilai rata-rata evaporasi harian adalah 10 mm dengan tingkat keyakinan 80%.

PENYELESAIAN

Tabel frekuensi dan histogram

Penyelesaian soal ini dapat dilakukan dengan cepat dengan menggunakan bantuan MSExcel. Hitungan disajikan dalam bentuk tabel frekuensi.

Distribusi frekuensi evaporasi harian (dalam mm) di suatu stasiun klimatologi.

Evaporasi harian E [mm]				Frekuensi f	fE [mm]	fE^2 [mm^2]
0	–	2	1	1	1	1
2	–	4	3	2	6	18
4	–	6	5	4	20	100
6	–	8	7	9	63	441
8	–	10	9	10	90	810
10	–	12	11	8	88	968
12	–	14	13	4	52	676
14	–	16	15	2	30	450
			∑	40	350	3464

Evaporasi harian rata-rata

$$\bar{E} = \frac{\sum f\,E}{\sum f} = \frac{350}{40} = 8.75 \approx 9\,\text{mm}$$

Simpangan baku evaporasi harian

$$s_E = \sqrt{\frac{\sum\left(f\,E^2\right) - \sum f \cdot \left(\bar{E}\right)^2}{\sum f - 1}} = \sqrt{\frac{3464 - 40 \times 8.75^2}{40 - 1}} = 3.21 \approx 3\,\text{mm}$$

Frekuensi evaporasi harian teoretis menurut distribusi normal

Distribusi frekuensi evaporasi harian teoretis menurut distribusi normal dapat dicari dengan menggunakan bantuan tabel cdf atau tabel pdf distribusi normal, atau dengan menggunakan bantuan MSExcel. Frekuensi teoretik suatu variabel random yang berdistribusi normal dihitung dengan memakai persamaan berikut:

$$f_E(e) = \Delta e \cdot p_E(e)$$
$$p_E(e) = \frac{\mathrm{d}P_E(e)}{\mathrm{d}e} \approx \frac{P_E\left(e_{\text{batas atas}}\right) - P_E\left(e_{\text{batas bawah}}\right)}{\Delta e}$$
$$f_E(e) = P_E\left(e_{\text{batas atas}}\right) - P_E\left(e_{\text{batas bawah}}\right)$$

Dalam persamaan di atas, $f_E(e)$ adalah frekuensi relatif, Δe adalah rentang klas, $p_E(e)$ adalah ordinat kurva normal standar, $P_E(e) = \text{prob}(E < e)$, $e_{\text{batas atas}}$ dan $e_{\text{batas bawah}}$ adalah batas atas dan batas bawah rentang klas evaporasi harian. Dalam MSExcel, nilai $P_E(e)$ dicari dengan perintah =NORMDIST(…), yaitu $P_E(1)$ = NORMDIST(1,9,3,TRUE). Nilai 9 dan 3 berturut-turut adalah nilai rata-rata dan simpangan baku evaporasi harian.

Apabila menggunakan tabel distribusi normal standar, nilai $P_E(e)$ harus diubah dulu kedalam nilai normal standar.

$$\begin{aligned} f_E(e) &= P_Z\left(z_{\text{batas atas}}\right) - P_Z\left(z_{\text{batas bawah}}\right) \\ &= P_Z\left(\frac{e_{\text{batasatas}} - \bar{E}}{s_E}\right) - P_Z\left(\frac{e_{\text{batasbawah}} - \bar{E}}{s_E}\right) \end{aligned}$$

Untuk klas pertama, 0 < E < 2, frekuensi teoretik menurut distribusi normal adalah:

$$
\begin{aligned}
f_E(e) &= P_Z\left(\frac{2-9}{3}\right) - P_Z\left(\frac{0-9}{3}\right) \\
&= P_Z(-2.3333) - P_Z(-3) \\
&= 0.0098 - 0.0013 \\
&= 0.0085
\end{aligned}
$$

Nilai $P_Z(z)$ selain dapat diperoleh dari tabel distribusi normal standar, dapat pula diperoleh dengan perintah =NORMSDIST(…) dalam MSExcel: $P_Z(-2.3333)$ = NORMSDIST(−2.3333) dan . $P_Z(-3)$ = NORMSDIST(−3).

Apabila menggunakan MSExcel, nilai $P_E(e)$ dapat langsung dihitung dengan perintah =NORMDIST(...). Untuk klas pertama, frekuensi teoretik dihitung sebagai berikut:

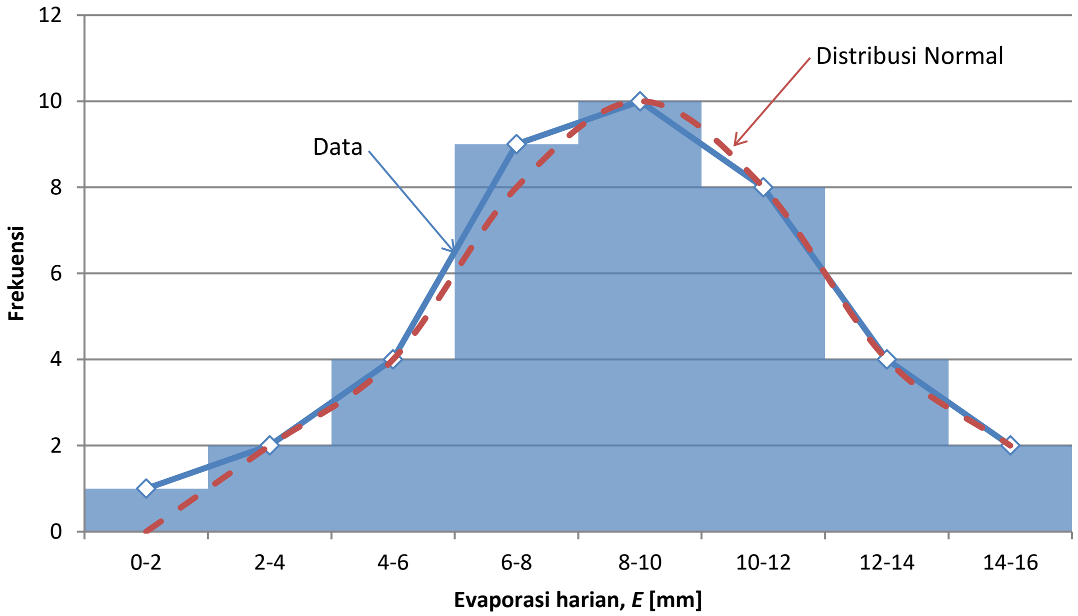
$$
\begin{aligned}
f_E(e) &= P_E(e_{\text{batas atas}}) - P_E(e_{\text{batas bawah}}) \\
&= P_E(2) - P_E(0) \\
&= \text{NORMDIST}(2,9,3,\text{TRUE}) - \text{NORMDIST}(0,9,3,\text{TRUE}) \\
&= 0.0098 - 0.0013 \\
&= 0.0085
\end{aligned}
$$

Dengan ukuran sampel 40 buah, maka frekuensi teoretik pada klas pertama adalah 0.0085 × 40 ≈ 0. Frekuensi teoretik untuk seluruh klas interval disajikan pada tabel di bawah ini.

Distribusi frekuensi evaporasi harian di suatu stasiun menurut distribusi normal.

Data			Distribusi Normal		
Klas *E* (mm)	Frek *f*	Klas *Z*	$P_Z(z)$	$f_Z(z)$	Frek *f*
0 – 2	1	-3.0000 – -2.3333	0.0013 – 0.0098	0.0085	0
2 – 4	2	-2.3333 – -1.6667	0.0098 – 0.0478	0.0380	2
4 – 6	4	-1.6667 – -1.0000	0.0478 – 0.1587	0.1109	4
6 – 8	9	-1.0000 – -0.3333	0.1587 – 0.3694	0.2108	8
8 – 10	10	-0.3333 – 0.3333	0.3694 – 0.6306	0.2611	10
10 – 12	8	0.3333 – 1.0000	0.6306 – 0.8413	0.2108	8
12 – 14	4	1.0000 – 1.6667	0.8413 – 0.9522	0.1109	4
14 – 16	2	1.6667 – 2.3333	0.9522 – 0.9902	0.0380	2
∑	40			∑	38

Grafik distribusi evaporasi harian menurut data pengukuran dan distribusi teoretik



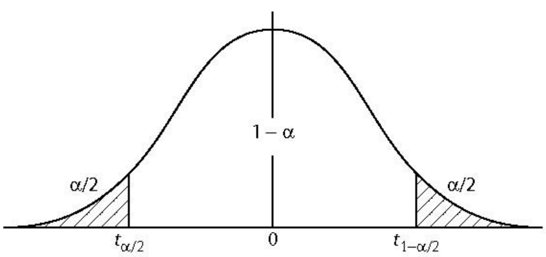
Memperhatikan perbandingan histogram data dan distribusi normal di atas, dapat disimpulkan bahwa evaporasi harian di stasiun tersebut berdistribusi normal.

Rentang keyakinan evaporasi harian rata-rata

Rentang keyakinan nilai rata-rata adalah suatu rentang dengan batas bawah L dan batas atas U sedemikian hingga dengan tingkat keyakinan $(1 - \alpha)$, atau dengan probabilitas $(1-\alpha)$, nilai evaporasi harian rata-rata, μ_E, berada di dalam rentang tersebut adalah prob($L < \mu_E < U$) = $(1-\alpha)$. Jika E berdistribusi normal, maka suatu variabel random V yang didefinisikan sebagai $V = \left(\bar{E} - \mu_E\right) / s_{\bar{E}}$ berdistribusi t. Oleh karena itu, rentang keyakinan evaporasi harian rata-rata dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{E} - \mu_E}{s_{\bar{E}}} < v_2 \right) = 1 - \alpha$$

Jika nilai v_1 dan v_2 ditetapkan sedemikian sehingga prob($t < v_1$) = prob($t > v_2$), dan dengan demikian prob($t < v_1$) = prob($t > v_2$) = $\alpha/2$ (lihat sketsa di bawah), maka batas bawah dan atas rentang keyakinan evaporasi harian rata-rata dapat diperoleh dari:



$$\text{prob}\left(t_{\alpha/2,\nu} < \frac{\bar{E} - \mu_E}{s_{\bar{E}}} < t_{1-\alpha/2,\nu} \right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(\bar{E} + t_{\alpha/2,\nu}\, s_{\bar{E}} < \mu_E < \bar{E} + t_{1-\alpha/2,\nu}\, s_{\bar{E}} \right) = 1 - \alpha$$

Dalam persamaan di atas, $t_{\alpha/2,\nu}$ dan $t_{1-\alpha/2,\nu}$ masing-masing adalah nilai T sedemikian hingga prob($T < t_{\alpha/2,\nu}$) = $\alpha/2$ dan prob($T < t_{1-\alpha/2,\nu}$) = $1 - \alpha/2$ untuk $\nu = n - 1$ *degrees of freedom*, $s_{\bar{E}} = s_E / \sqrt{n}$, dan n adalah jumlah data ($n = \Sigma f$). Nilai batas bawah dan atas rentang keyakinan evaporasi harian rata-rata dengan demikian adalah:

$\ell = \bar{E} + t_{\alpha/2,\nu}\left(s_E/\sqrt{n}\right)$ dan $u = \bar{E} + t_{1-\alpha/2,\nu}\left(s_E/\sqrt{n}\right)$.

Dengan nilai *degrees of freedom* $\nu = n - 1 = 39$ dan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 0.90$ ($\alpha/2 = 0.05$ dan $1 - \alpha/2 = 0.95$), maka dengan memakai tabel distribusi t atau fungsi =TINV(...), diperoleh nilai-nilai sebagai berikut:

prob($T < t_{0.05,39}$) = 0.05 → $t_{0.05,39} = -1.6849$ dan

prob($T < t_{0.975,39}$) = 0.975 → $t_{0.975,39} = 1.6849$.

Dengan demikian, batas bawah dan batas atas rentang keyakinan evaporasi harian rata-rata adalah:

$\ell = 9 - 1.6849\left(3/\sqrt{40}\right) \approx 8\,\text{mm}$ dan $u = 9 + 1.6849\left(3/\sqrt{40}\right) \approx 10\,\text{mm}$

sehingga: $8\,\text{mm} \le \mu_E \le 10\,\text{mm}$.

Tingkat keyakinan yang dimiliki seseorang yang menyatakan bahwa nilai rata-rata evaporasi harian adalah antara 8 mm s.d. 11 mm

Batas bawah dan batas atas rentang keyakinan evaporasi harian rata-rata dinyatakan dengan persamaan berikut:

$\ell = \bar{E} + t_{\alpha_a,\nu}\left(s_E/\sqrt{n}\right)$ dan $u = \bar{E} + t_{\alpha_b,\nu}\left(s_E/\sqrt{n}\right)$

Jika $\ell = 8\,\text{mm}$, maka

$$8 = 9 + t_{\alpha_a,\nu}\left(3/\sqrt{40}\right)$$
$$t_{\alpha_a,\nu} = -2.1082$$
$$\alpha_a = 0.0207$$

dan untuk u = 11 mm, maka

$$11 = 9 + t_{\alpha_b,\nu}\left(3/\sqrt{40}\right)$$
$$t_{\alpha_b,\nu} = 4.2164$$
$$\alpha_b = 7.1\times10^{-5}$$

Dengan demikian, tingkat keyakinan rentang keyakinan tersebut adalah:

$1 - \alpha = 1 - (\alpha_a + \alpha_b) = 0.9792 \approx 98\%$.

Uji hipotesis bahwa nilai rata-rata evaporasi harian adalah 10 mm dengan tingkat keyakinan 80%

Uji hipotesis ini dilakukan dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0: μ = 10 mm

H_a: $\mu \ne$ 10 mm

Karena varian populasi tidak diketahui, maka statistik uji dalam uji hipotesis ini adalah:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{\sqrt{n}}{s_E}\left(\bar{E} - \mu\right) \\
&= \frac{\sqrt{40}}{3}(9 - 10) \\
&= -2.1082
\end{aligned}
$$

Dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 0.80$, maka batas penerimaan hipotesis adalah:

$$
\begin{aligned}
t_{1-\alpha/2,\nu} &= t_{0.90,39} \\
&= \mathrm{TINV}\left(2 * (1 - 0.90), 39\right) \\
&= 1.3036
\end{aligned}
$$

Karena $|T| > t_{1-\alpha/2,39}$, maka H_0 ditolak.

-o0o-