

PENYELESAIAN SOAL UJIAN TENGAH SEMESTER 2011

SOAL A

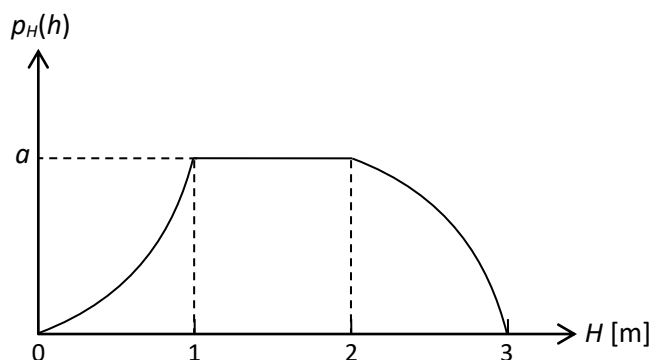
Pengolahan data elevasi muka air di atas bendung, H m, menunjukkan bahwa sebaran probabilitas elevasi muka air tersebut, $p_H(h)$, dapat dinyatakan dengan suatu fungsi (pdf) berikut:

$$\begin{aligned} p_H(h) &= ah^2 && \text{jika } 0 \leq h \leq 1 \\ &= a && \text{jika } 1 \leq h \leq 2 \\ &= -a(h-2)^2 + a && \text{jika } 2 \leq h \leq 3 \\ &= 0 && \text{untuk nilai } h \text{ yang lain} \end{aligned}$$

1. Buat sketsa kurva pdf tersebut.
2. Hitung nilai konstanta a .
3. Cari dan buat sketsa fungsi distribusi kumulatif (cdf) elevasi muka air di atas bendung, H .
4. Hitung nilai rata-rata elevasi muka air di atas bendung, \bar{H} .
5. Hitung nilai simpangan baku muka air di atas bendung, s_H .
6. Hitung probabilitas elevasi muka air di atas bendung antara 1 s.d. 2 m, $\text{prob}(1 \text{ m} < H < 2 \text{ m})$.
7. Jika pdf dan cdf di atas dapat dianggap tetap (konstan), hitung probabilitas elevasi muka air di atas bendung tidak akan pernah melampaui 2 m dalam kurun 10 tahun ke depan.

PENYELESAIAN

Sketsa pdf



Konstanta a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_H(h) dh = 1$$

$$\int_{-\infty}^0 0 dh + \int_0^1 ah^2 dh + \int_1^2 a dh + \int_2^3 [-a(h-2)^2 + a] dh + \int_3^{+\infty} 0 dh = 1$$

$$0 + \int_0^1 ah^2 dh + \int_1^2 a dh + \int_2^3 (-ah^2 + 4ah - 3a) dh + \int_3^{+\infty} 0 dh = 1$$

$$0 + \left[\frac{a}{3} h^3 \right]_0^1 + [ah]_1^2 + \left[-\frac{a}{3} h^3 + 2ah^2 - 3ah \right]_2^3 + 0 = 1$$

$$0 + \frac{a}{3}(1-0) + a(2-1) + \left[-\frac{a}{3}(27-8) + 2a(9-4) - 3a(3-2) \right] + 0 = 1$$

$$\frac{a}{3} + a + \left(-\frac{19a}{3} + 10a - 3a \right) = 1$$

$$8a - \frac{18a}{3} = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Fungsi distribusi kumulatif, cdf

$$P_H(h) = \text{prob}(H < h) = \int p_H(h) dh$$

Interval $h \leq 0$

$$P_H(h) = 0$$

Interval $0 \leq h \leq 1$ m

$$P_H(h) = \int \frac{1}{2} h^2 dh = \frac{1}{6} h^3 + C_1$$

Syarat batas: $P_H(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$P_H(h) = \frac{1}{6} h^3 \Rightarrow P_H(1) = \frac{1}{6}$$

Interval $1 \text{ m} \leq h \leq 2 \text{ m}$

$$P_H(h) = \int \frac{1}{2} dh = \frac{1}{2} h + C_2$$

Syarat batas: $P_H(1) = 1/6 \Rightarrow \frac{1}{2} + C_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{3}$

$$P_H(h) = \frac{1}{2} h - \frac{1}{3}$$

Interval $2 \text{ m} \leq h \leq 3 \text{ m}$

$$P_H(h) = \int \left[-\frac{1}{2}(h-2)^2 + \frac{1}{2} \right] dh = \int \left(-\frac{1}{2}h^2 + 2h - \frac{3}{2} \right) dh = -\frac{1}{6}h^3 + h^2 - \frac{3}{2}h + C_3$$

Syarat batas: $P_H(3) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{6}27 + 9 - \frac{9}{2} + C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = 1$

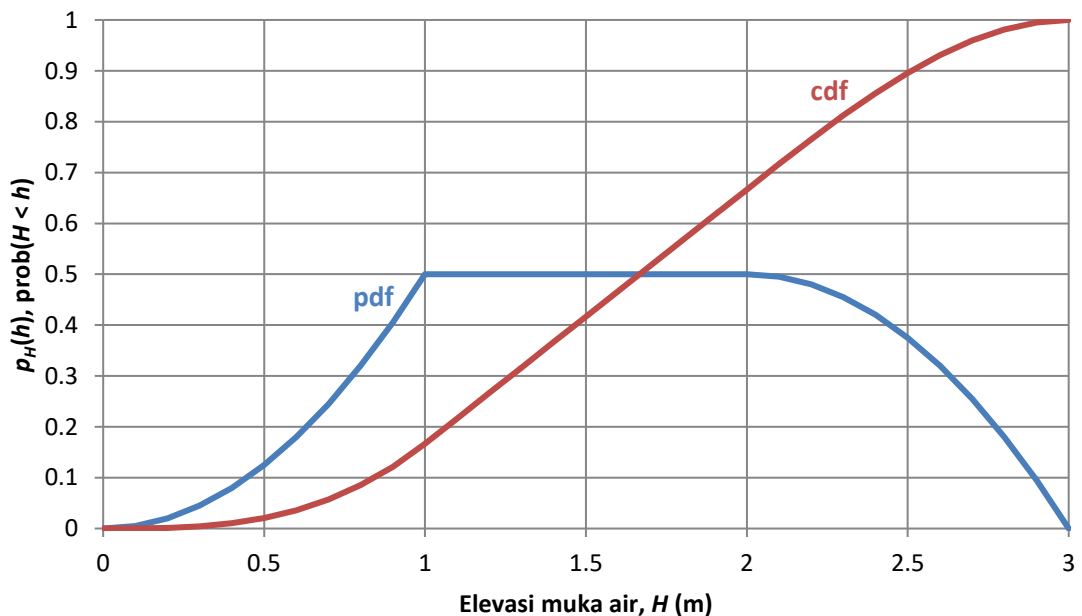
$$P_H(h) = -\frac{1}{6}h^3 + h^2 - \frac{3}{2}h + 1$$

Interval $h \geq 3$ m

$$P_H(h) = 1$$

Persamaan pdf dan cdf elevasi muka air di atas bendung.

Elevasi muka air H [m]	pdf	cdf
$h \leq 0$	$p_H(h) = 0$	$P_H(h) = 0$
$0 \leq h \leq 1$ m	$p_H(h) = \frac{1}{2}h^2$	$P_H(h) = \frac{1}{6}h^3$
$1 \text{ m} \leq h \leq 2$ m	$p_H(h) = \frac{1}{2}$	$P_H(h) = \frac{1}{2}h - \frac{1}{3}$
$2 \text{ m} \leq h \leq 3$ m	$p_H(h) = -\frac{1}{2}(h-2)^2 + \frac{1}{2}$	$P_H(h) = -\frac{1}{6}h^3 + h^2 - \frac{3}{2}h + 1$
$h \geq 3$ m	$p_H(h) = 0$	$P_H(h) = 1$



Elevasi muka air rata-rata

Elevasi muka air rata-rata merupakan nilai ekspektasi elevasi muka air, $E(H)$, yang merupakan momen pertama terhadap sumbu ordinat pada pdf.

$$E(H) = \int h p_H(h) dh = \int_0^1 \frac{1}{2} h^3 dh + \int_1^2 \frac{1}{2} h dh + \int_2^3 \left[-\frac{1}{2} h(h-2)^2 + \frac{1}{2} h \right] dh$$

$$E(H) = \int h p_H(h) dh = \int_0^1 \frac{1}{2} h^3 dh + \int_1^2 \frac{1}{2} h dh + \int_2^3 \left(-\frac{1}{2} h^3 + 2h^2 - \frac{3}{2} h \right) dh$$

$$\begin{aligned}
E(H) &= \int h p_H(h) dh = \left[\frac{1}{8} h^4 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4} h^2 \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{8} h^4 + \frac{2}{3} h^3 - \frac{3}{4} h^2 \right]_2^3 \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}(4-1) - \frac{1}{8}(81-16) + \frac{2}{3}(27-8) - \frac{3}{4}(9-4) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{65}{8} + \frac{38}{3} - \frac{15}{4} \\
&= -8 - 3 + 12 \frac{2}{3} \\
&= 1 \frac{2}{3} \text{ m}
\end{aligned}$$

Simpangan baku elevasi muka air

Simpangan baku elevasi muka air, s_H , merupakan akar kuadrat varian. Nilai varian dihitung sebagai nilai momen kedua terhadap nilai rata-rata:

$$\begin{aligned}
\text{var}(H) &= E[(H - \bar{H})^2] = E(H^2) - E^2(H) \\
E(H^2) &= \int h^2 p_H(h) dh = \int_0^1 \frac{1}{2} h^4 dh + \int_1^2 \frac{1}{2} h^2 dh + \int_2^3 \left(-\frac{1}{2} h^4 + 2h^3 - \frac{3}{2} h^2 \right) dh \\
&= \left[\frac{1}{10} h^5 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{6} h^3 \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{10} h^5 + \frac{1}{2} h^4 - \frac{1}{2} h^3 \right]_2^3 \\
&= \frac{1}{10} + \frac{1}{6}(8-1) - \frac{1}{10}(243-32) + \frac{1}{2}(81-16) - \frac{1}{2}(27-8) \\
&= -\frac{210}{10} + \frac{7}{6} + \frac{46}{2} = \frac{19}{6} = 3 \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\text{var}(H) = 3 \frac{1}{6} - \left(1 \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{19}{6} - \frac{25}{9} = \frac{57-50}{18} = \frac{7}{18} \text{ m}^2$$

$$s_H = \sqrt{\frac{7}{18}} = 0.624 \text{ m}$$

Probabilitas elevasi muka air antara 1 s.d. 2 m

$$\begin{aligned}
\text{prob}(1 < H < 2) &= \text{prob}(H < 2) - \text{prob}(H < 1) \\
&= P_H(2) - P_H(1) \\
&= \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{1}{2} = 50\%
\end{aligned}$$

Probabilitas elevasi muka air tidak akan pernah melampaui 70 mm dalam kurun 10 tahun ke depan

Dengan asumsi bahwa pdf dan cdf bersifat konstan, maka probabilitas elevasi muka air dalam kurun 10 tahun dapat dihitung memakai persamaan distribusi binomial:

$$f_x(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Persamaan di atas menyatakan frekuensi terjadi elevasi muka air melebihi 2 m sejumlah x kali dalam kurun n tahun apabila probabilitas terjadinya elevasi muka air melebihi 2 m per tahun adalah p . Probabilitas elevasi muka air melebihi 2 m, p , adalah:

$$p = 1 - P_H(2) \\ = 1 - \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

Dengan demikian, probabilitas elevasi muka air tidak pernah melampaui 2 m dalam kurun 10 tahun adalah:

$$f_x(0;10,0.12) = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{3} \right)^0 \left(\frac{2}{3} \right)^{10-0} \\ = 1 \times 1 \times \left(\frac{2}{3} \right)^{10} \\ = 0.0173$$

SOAL B

Tabel di bawah ini menunjukkan frekuensi (dalam persen) kejadian angin di Stasiun Bajang tahun 2001-2005.

Kecepatan angin (knot)	Arah angin (°)							
	0	45	90	135	180	225	270	315
0 – 5	1.5	6.0	2.6	0.8	0.8	0.8	0	0
5 – 10	3.3	2.3	8.3	2.4	2.4	1.1	1.4	0.8
10 – 15	5.3	6.1	9.8	2.8	1.9	1.0	1.2	1.7
15 – 20	4.1	4.9	7.9	2.3	1.5	0.8	1.0	1.3
20 – ∞	0.8	4.6	3.5	0.3	1.3	0.8	0.3	0.3

1. Hitunglah nilai rata-rata dan simpangan baku kecepatan angin.
2. Hitunglah nilai rata-rata dan simpangan baku arah angin.
3. Jika suatu saat arah angin 90°, perkirakanlah peluang kecepatan angin tersebut lebih daripada 15 knots.
4. Suatu saat terjadi angin 12.5 knots; berapakah kemungkinan bahwa arah angin 45°?

PENYELESAIAN

Nilai rata-rata dan simpangan baku dihitung dengan cara tabulasi.

Kecepatan Angin (knots)	Arah Angin (°)								Σ	f v	f (v-rata) ²	
	0	45	90	135	180	225	270	315				
0 – 5	2.5	1.5	6.0	2.6	0.8	0.8	0.8	0.0	12.5	0.3	12.6	
5 – 10	7.5	3.3	2.3	8.3	2.4	2.4	1.1	1.4	0.8	22.0	1.7	5.6
10 – 15	12.5	5.3	6.1	9.8	2.8	1.9	1.0	1.2	1.7	29.8	3.7	0.0
15 – 20	17.5	4.1	4.9	7.9	2.3	1.5	0.8	1.0	1.3	23.8	4.2	5.9
20 – ∞	22.5	0.8	4.6	3.5	0.3	1.3	0.8	0.3	0.3	11.9	2.7	11.8
Σ		15.0	23.9	32.1	8.6	7.9	4.5	3.9	4.1	100.0	12.5	35.8
f θ		0.0	10.8	28.9	11.6	14.2	10.1	10.5	12.9	99.0		
f (θ-rata) ²		1,471.5	698.1	26.3	111.2	517.7	713.9	1,139.8	1,912.1	6,590.6		

Kecepatan angin: rata-rata = 12.5 knots, simpangan baku = $\sqrt{35.8} \approx 6$ knots.

Arah angin: rata-rata = 99°, simpangan baku = $\sqrt{6590.6} \approx 81.2^\circ$.

$$\text{prob}(v > 15 \text{ knots} \mid \Theta = 90^\circ) = (7.9+3.5)/32.1 = 0.36.$$

$$\text{prob}(\Theta = 45^\circ \mid v = 12.5 \text{ knots}) = 6.1/29.8 = 0.20.$$

Catatan:

- arah angin $\Theta = 90^\circ$ dibaca $67.5^\circ < \Theta < 112.5^\circ$, arah angin $\Theta = 45^\circ$ dibaca $22.5^\circ < \Theta < 67.5^\circ$,
- kecepatan angin $v = 12.5$ knots dibaca $10 \text{ knots} < v < 15 \text{ knots}$.

SOAL C

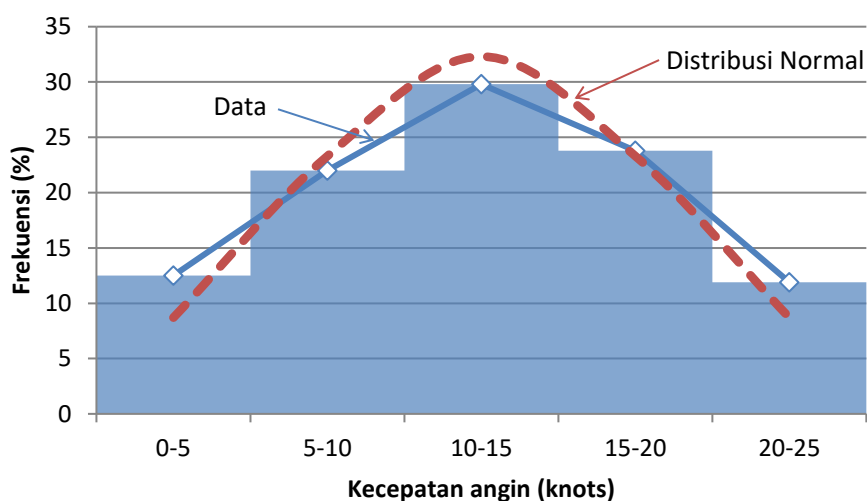
Mengacu pada data angin pada Soal B.

1. Buatlah tabel frekuensi dan histogram data kecepatan angin.
2. Hitunglah frekuensi data kecepatan angin dalam setiap klas data menurut distribusi normal.
3. Hitunglah rentang keyakinan nilai rata-rata kecepatan angin dengan tingkat keyakinan 90%.
4. Hitunglah tingkat keyakinan yang dimiliki seseorang yang menyatakan bahwa nilai rata-rata kecepatan angin adalah antara 11 s.d. 14 knots.

PENYELESAIAN

Tabel frekuensi, histogram, dan frekuensi teoretik menurut distribusi normal dikerjakan dengan bantuan spreadsheet MExcel.

kecepatan (knots)	frekuensi (data)	frekuensi (teoretik)
0 – 5	12.5	8.7
5 – 10	22	23.3
10 – 15	29.8	32.3
15 – 20	23.8	23.3
20 – 25	11.9	8.7
Σ	100.0	96.3



Rentang keyakinan kecepatan angin rata-rata:

$$\text{prob}(\bar{V} + t_{\alpha/2, v} s_{\bar{V}} < \mu_V < \bar{V} + t_{1-\alpha/2, v} s_{\bar{V}}) = 1 - \alpha$$

$$l = \bar{V} + t_{\alpha/2, v} (s_V / \sqrt{n}) \text{ dan } u = \bar{V} + t_{1-\alpha/2, v} (s_V / \sqrt{n}), 1 - \alpha = 0.90$$

Dalam menghitung nilai t , *degrees of freedom* v dapat diambil nilai yang besar mengingat data diperoleh dari pengukuran kecepatan angin selama 5 tahun. Jika data asli dianggap data harian saja, jumlah data sudah lebih daripada 1500. Dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 0.90$, maka nilai t adalah:

$$\text{prob}(T < t_{0.05, 1500}) = 0.05 \quad \rightarrow t_{0.05, 39} = -1.646$$

$$\text{prob}(T < t_{0.95, 1500}) = 0.95 \quad \rightarrow t_{0.95, 39} = 1.646$$

$$l = 12.5 - 1.646 (6 / \sqrt{1500}) \approx 12.25 \text{ knots dan } u = 12.5 + 1.646 (6 / \sqrt{1500}) \approx 12.75 \text{ knots}$$

Jadi, rentang keyakinan 90% kecepatan angin rata-rata adalah:

$$\text{prob}(12.25 \text{ knots} < \mu_V < 12.75 \text{ knots}) = 0.90 .$$

Tingkat keyakinan yang dimiliki seseorang yang menyatakan bahwa nilai rata-rata kecepatan angin adalah antara 11 knots s.d. 14 knots dihitung sbb.

Batas bawah dan batas atas rentang keyakinan kecepatan angin rata-rata dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$l = \bar{V} + t_{\alpha_a, v} (s_V / \sqrt{n}) \text{ dan } u = \bar{V} + t_{\alpha_b, v} (s_V / \sqrt{n})$$

Jika $l = 11$ knots, maka

$$11 = 12.5 + t_{\alpha_a, v} (6 / \sqrt{1500})$$

$$t_{\alpha_a, v} = -9.68$$

$$\alpha_a \approx 0$$

dan untuk $u = 14$ knots, maka

$$14 = 12.5 + t_{\alpha_b, v} (6 / \sqrt{1500})$$

$$t_{\alpha_b, v} = 9.68$$

$$\alpha_b \approx 0$$

$$1 - \alpha = 1 - (\alpha_a + \alpha_b) \approx 1 \approx 100\% .$$

Dengan demikian, tingkat keyakinan rentang keyakinan kecepatan angin rata-rata 11 knots s.d. 14 knots adalah mendekati 100%

-oOo-