PENYELESAIAN SOAL UJIAN TENGAH SEMESTER 2012

SOAL

Hujan deras didefinisikan sebagai hujan harian yang memiliki kedalaman lebih daripada 50 mm atau intensitas lebih daripada 20 mm/jam. Data di bawah ini adalah kejadian hujan deras yang diukur di 14 stasiun ARR yang berlokasi di lereng G. Merapi pada 1980-2010.

pukul	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
frekuensi	7	8	5	2	2	3	7	1	0	10	16	45
pukul	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
frekuensi	64	115	175	182	152	92	59	34	29	14	13	13

Memperhatikan data di atas, tampak bahwa hujan deras pada pk 01:00 s.d. 09:00 jarang terjadi. Untuk itu, hujan deras yang terjadi pada periode waktu tersebut tidak ditinjau lebih lanjut. Data pada periode pk 01:00 s.d. 09:00 dikeluarkan dari tinjauan.

1. Buatlah tabel frekuensi waktu kejadian hujan deras.
2. Hitunglah waktu rerata dan simpangan baku kejadian hujan deras. Waktu rerata boleh dibulatkan ke angka interval 5 menit terdekat, sedangkan simpangan baku boleh dibulatkan ke menit terdekat.
3. Gambarlah histogram data tersebut.
4. Pada gambar yang sama, gambarlah pdf distribusi normal. Dapatkah disimpulkan bahwa waktu kejadian hujan deras di lereng G. Merapi berdistribusi normal?
5. Perkirakanlah probabilitas terjadi hujan deras pada pk 14:00 s.d. 18:00.
6. Tetapkan rentang keyakinan waktu hujan deras rerata dengan tingkat keyakinan 90%. Pakailah rentang simetri.
7. Lakukan uji hipotesis yang menyatakan bahwa waktu rerata kejadian hujan deras di lereng G. Merapi adalah pada pk 15:45. Pakailah tingkat keyakinan 95%.

PENYELESAIAN

Tabel frekuensi waktu kejadian hujan deras di 14 stasiun ARR yang berada di lereng G. Merapi pada perioda 1980 s.d. 2010 disajikan pada Tabel 1. Di bawah ini adalah hitungan untuk mendapatkan waktu kejadian rerata dan simpangan baku waktu kejadian hujan deras.

Waktu rerata kejadian hujan deras

$$\bar{X} = \frac{\sum f X}{\sum f} = \frac{16364}{1013} = 16.154 \approx \text{pukul}\, 16:10$$

Simpangan baku waktu kejadian hujan deras

$$s_X = \sqrt{\frac{\sum\left(f X^2\right) - \sum f \cdot \left(\bar{X}\right)^2}{\sum f - 1}} = \sqrt{\frac{271304 - 1013 \times 16.154^2}{1013 - 1}} = 2.6225 \approx 2\ \text{jam}\ 37\ \text{menit}$$

Tabel 1. Distribusi frekuensi waktu kejadian hujan deras di 14 stasiun ARR di lereng G. Merapi pada perioda 1980-2010

Pukul X	Frekuensi f	fX [pk]	fX^2 [pk^2]
10	10	100	1000
11	16	176	1936
12	45	540	6480
13	64	832	10816
14	115	1610	22540
15	175	2625	39375
16	182	2912	46592
17	152	2584	43928
18	92	1656	29808
19	59	1121	21299
20	34	680	13600
21	29	609	12789
22	14	308	6776
23	13	299	6877
24	13	312	7488
∑	1013	16364	271304

pdf distribusi normal

Distribusi frekuensi waktu kejadian hujan deras teoretis menurut distribusi normal dicari dengan menggunakan bantuan tabel pdf distribusi normal. Frekuensi teoretik suatu variabel random yang berdistribusi normal dihitung dengan memakai persamaan berikut:

$$f_X(x) = \Delta x \cdot p_X(x)$$

Dalam persamaan di atas, $f_X(x)$ adalah frekuensi relatif, Δx adalah rentang klas, $p_X(x)$ adalah ordinat kurva normal standar. Tentu saja, $p_X(x)$ diperoleh melalui $p_Z(z)$ yang dibaca dari tabel pdf distribusi normal standar. Sebagai contoh, untuk waktu kejadian pukul 10:00, frekuensi teoretik menurut distribusi normal adalah:

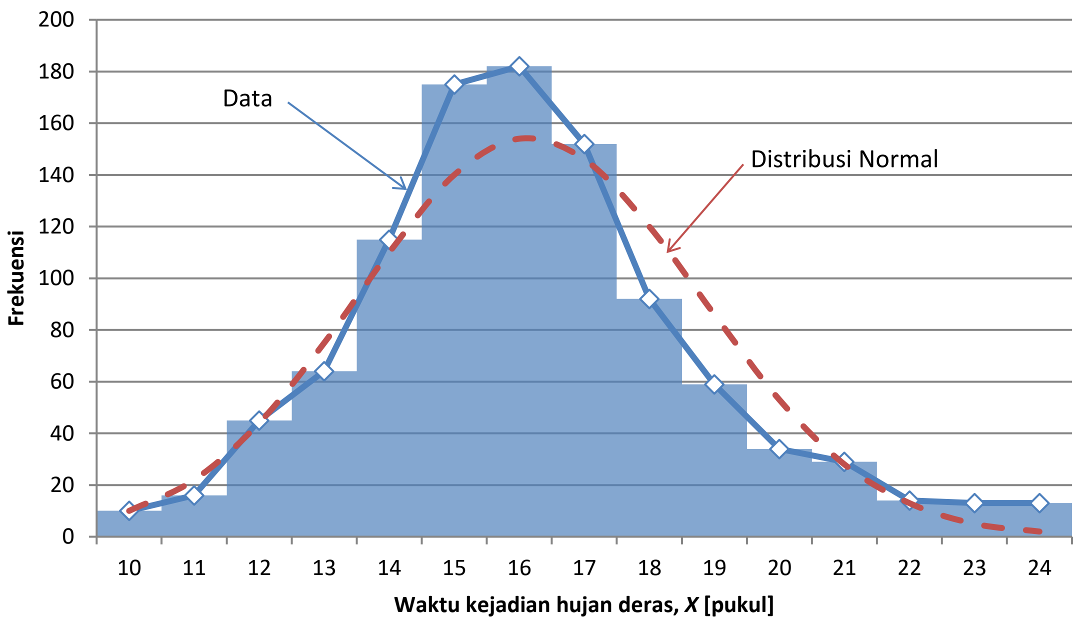
$$\begin{aligned} f_X(x=10) &= \Delta x \cdot p_X(x=10) \\ &= \Delta x \cdot \frac{p_Z(x=10)}{s_X} \\ &= 1 \cdot p_Z\left(\frac{10-16.154}{2.6225}\right) \cdot \frac{1}{2.6225} \\ &= 1 \cdot p_Z(-2.3466) \cdot \frac{1}{2.6225} \\ &= \frac{0.0254}{2.6225} = 0.0097 \end{aligned}$$

Dengan ukuran sampel 1013, maka frekuensi teoretik pada waktu kejadian pukul 10:00 adalah 0.0097 × 1013 ≈ 10. Frekuensi teoretis untuk seluruh waktu kejadian hujan deras disajikan pada tabel di bawah ini.

Tabel 2. Distribusi frekuensi waktu kejadian hujan deras di 14 stasiun ARR di lereng G. Merapi pada perioda 1980-2010 menurut distribusi normal

Pukul	Data	Distribusi Normal Teoretis			
X	Frekuensi f	Z	$p_Z(z)$	$p_X(x)$	Frekuensi f
10	10	-2.3466	0.0254	0.0097	10
11	16	-1.9653	0.0578	0.0221	22
12	45	-1.5840	0.1138	0.0434	44
13	64	-1.2027	0.1936	0.0738	75
14	115	-0.8214	0.2847	0.1086	110
15	175	-0.4400	0.3621	0.1381	140
16	182	-0.0587	0.3983	0.1519	154
17	152	0.3226	0.3787	0.1444	146
18	92	0.7039	0.3114	0.1187	120
19	59	1.0852	0.2214	0.0844	86
20	34	1.4665	0.1361	0.0519	53
21	29	1.8479	0.0724	0.0276	28
22	14	2.2292	0.0333	0.0127	13
23	13	2.6105	0.0132	0.0050	5
24	13	2.9918	0.0045	0.0017	2
∑	1013			0.9940	1008

Histogram distribusi waktu kejadian hujan deras menurut data pengukuran dan distribusi normal teoretis



Memperhatikan perbandingan histogram data dan distribusi normal di atas, dapat disimpulkan bahwa waktu kejadian hujan deras di 14 stasiun ARR tersebut berdistribusi normal.

Probabilitas terjadi hujan deras pada pukul 14:00 s.d. 18:00

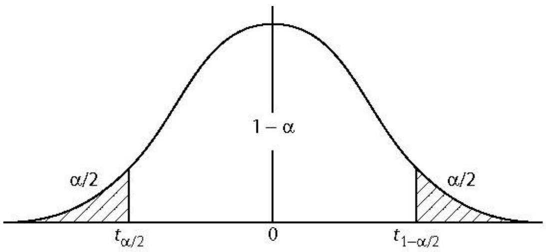
$$
\begin{aligned}
\text{prob}(14 \le X \le 18) &= \text{prob}(X \le 18) - \text{prob}(X \le 14)\\
&= \text{prob}\left(Z \le \frac{18-16.154}{2.6225}\right) - \text{prob}\left(Z \le \frac{14-16.154}{2.6225}\right)\\
&= \text{prob}(Z \le 0.7039) - \text{prob}(Z \le -0.8214)\\
&= 0.7593 - 0.2057\\
&= 0.5535
\end{aligned}
$$

Rentang keyakinan waktu rerata kejadian hujan deras

Rentang keyakinan nilai rerata adalah suatu rentang dengan batas bawah *L* dan batas atas *U* sedemikian hingga dengan tingkat keyakinan $(1-\alpha)$, atau dengan probabilitas $(1-\alpha)$, nilai waktu rerata, μ_X, berada di dalam rentang tersebut adalah prob($L < \mu_E < U$) = $(1-\alpha)$. Jika *X* berdistribusi normal, maka suatu variabel random *V* yang didefinisikan sebagai $V = \left(\bar{X} - \mu_X\right)/s_{\bar{X}}$ berdistribusi t. Oleh karena itu, rentang keyakinan waktu rerata dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{X}-\mu_X}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1-\alpha$$

Jika nilai v_1 dan v_2 ditetapkan sedemikian sehingga prob($t < v_1$) = prob($t > v_2$), dan dengan demikian prob($t < v_1$) = prob($t > v_2$) = $\alpha/2$ (lihat sketsa di bawah), maka batas bawah dan atas rentang keyakinan waktu rerata dapat diperoleh dari:



$$\text{prob}\left(t_{a/2,\nu} < \frac{\bar{X}-\mu_X}{s_{\bar{X}}} < t_{1-\alpha/2,\nu}\right) = 1-\alpha$$

$$\text{prob}\left(\bar{X} + t_{a/2,\nu}\, s_{\bar{X}} < \mu_X < \bar{X} + t_{1-\alpha/2,\nu}\, s_{\bar{X}}\right) = 1-\alpha$$

Dalam persamaan di atas, $t_{\alpha/2,\nu}$ dan $t_{1-\alpha/2,\nu}$ masing-masing adalah nilai *T* sedemikian hingga prob($T < t_{\alpha/2,\nu}$) = $\alpha/2$ dan prob($T < t_{1-\alpha/2,\nu}$) = $1 - \alpha/2$ untuk $\nu = n - 1$ *degrees of freedom*, $s_{\bar{X}} = s_X \big/ \sqrt{n}$, dan *n* adalah jumlah data ($n = \Sigma f$). Nilai batas bawah dan atas rentang keyakinan waktu rerata dengan demikian adalah:

$$\ell = \bar{X} + t_{\alpha/2,\nu}\left(s_X \big/ \sqrt{n}\right) \text{ dan } u = \bar{X} + t_{1-\alpha/2,\nu}\left(s_X \big/ \sqrt{n}\right).$$

Dengan nilai *degrees of freedom* $\nu = n - 1 = 1012$ dan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 0.90$ ($\alpha/2$ = 0.05 dan $1 - \alpha/2$ = 0.95), maka dengan memakai tabel distribusi t, diperoleh nilai-nilai sebagai berikut:

prob($T < t_{0.05,1012}$) = 0.05 → $t_{0.05,1012} = -1.6464$ dan

prob($T < t_{0.95,1012}$) = 0.95 → $t_{0.975,1012} = 1.6464$.

Dengan demikian, batas bawah dan batas atas rentang keyakinan evaporasi harian rata-rata adalah:

$\ell = 16.154 - 1.6464\left(2.6225/\sqrt{1013}\right) \approx 16.0183$ dan $u = 16.154 + 1.6464\left(2.6225/\sqrt{1013}\right) \approx 16.2897$

sehingga: $16.0183 \le \mu_X \le 16.2897$ atau pukul $16:01 \le \mu_X \le$ pukul $16:17$.

Uji hipotesis bahwa waktu rerata hujan deras adalah pada pukul 15:45 dengan tingkat keyakinan 95%

Uji hipotesis ini dilakukan dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0: μ = 15:45 = 15.75

H_a: $\mu \neq$ 15:45 = 15.75

Karena varian populasi tidak diketahui, maka statistik uji dalam uji hipotesis ini adalah:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{\sqrt{n}}{s_X}\left(\bar{X} - \mu\right) \\
&= \frac{\sqrt{1013}}{2.6225}\left(16.154 - 15.75\right) \\
&= 4.9031
\end{aligned}
$$

Dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 0.95$, maka batas penerimaan hipotesis adalah:

$$
\begin{aligned}
t_{1-\alpha/2,\nu} &= t_{0.975,1012} \\
&= 1.9623
\end{aligned}
$$

Karena $|T| > t_{1-\alpha/2,\nu}$, maka H_0 ditolak.

-o0o-