PROPERTIES OF RANDOM VARIABLES

SAMPLE MOMENTS

Univariate Random Variables

Random samples, x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$

Momen ke-r terhadap O, r^{th} sample moment with respect to O

$$M'_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\,r}}{n}$$

Momen ke-r terhadap nilai rata-rata

$$M_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \overline{X}\right)^r}{n}$$

Bivariate Random Variables

Momen ke-r,s terhadap O

$$M'_{r,s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\,r}\, y_i^{\,s}}{n}$$

dan terhadap mean

$$M_{r,s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \overline{X}\right)^r \left(y_i - \overline{Y}\right)^s}{n}$$

Momen terhadap O dan momen terhadap mean

$$M_r = \sum_{i=1}^{n} \left(-1\right)^s \binom{r}{s} \mu^s\, M'_{r,s}$$

Apabila data dikelompokkan menjadi sejumlah klas data:

$$M'_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j^{\,i}\, n_j}{n}$$

$$M_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(x_j - \overline{X}\right)^i n_j}{n}$$

MOMEN DAN EXPEKTASI VARIABEL RANDOM KONTINU

Variabel random kontinu: X, Y bergabung dalam berdistribusi (jointly distributed continuous random variables).

Jika U adalah fungsi X dan Y, maka expektasi U, $E(U)$, dapat diperoleh dengan mencari marginal distribution U, $p_U(U)$.

$$U = g(X,Y) \;\Rightarrow\; E(U) = E[g(X,Y)] = \int u\, p_U(u)\,\mathrm{d}u$$

Expektasi U dapat pula diperoleh melalui persamaan berikuti ini.

Kontinu: $$E[g(X,Y)] = \iint g(X,Y)\, p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Diskrit: $$E[g(X,Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)\, p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Expektasi U merupakan nilai rata-rata fungsi $g(X,Y)$.

Momen ke-r,s

Kontinu: $$\mu'_{r,s} = \iint x^r\, y^s\, p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Diskrit: $$\mu'_{r,s} = \sum_i \sum_j x_i^{\,r}\, y_j^{\,s}\, f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Momen sentral ke-r,s

Kontinu: $$\mu_{r,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^r\, (y-\mu_Y)^s\, p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Diskrit: $$\mu_{r,s} = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)^r\, (y_j - \mu_Y)^s\, f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Catatan:

$$\begin{aligned} E\left(X^1, Y^0\right) &= \iint x^1\, y^0\, p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int x \left(\int p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int x\, p_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mu_X \end{aligned}$$

$$E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \mathrm{var}(X)$$

Covariance

Central moment $r = 1$, $s = 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= \sigma_{X,Y} = \mu_{1,1} \\ &= E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \iint (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Estimasi covariance berdasarkan sampel

$$s_{X,Y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \overline{X}\right)\left(y_i - \overline{Y}\right)}{(n-1)}$$

Correlation Coefficient

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \, \sigma_Y}, \quad -1 \le \rho_{X,Y} \le 1$$

$$r_{X,Y} = \frac{s_{X,Y}}{s_X \, s_Y}$$

Covariance dan correlation coefficient menunjukkan tingkat keterkaitan kedua variable *X* dan *Y*.

Jika $\rho_{X,Y}$ ($\sigma_{X,Y}$) > 0: *X* besar cenderung berpasangan dengan *Y* besar, dan sebaliknya.

Jika $\rho_{X,Y}$ ($\sigma_{X,Y}$) < 0: *X* besar cenderung berpasangan dengan *Y* kecil, dan sebaliknya.

Jika *X* dan *Y* independent, maka $\rho_{X,Y}$ ($\sigma_{X,Y}$) = 0, namun tidak berlaku sebaliknya.

Pembaca disarankan untuk membaca hlm 53-55 *Statistical Method in Hydrology* (Haan, 1982) yang memberikan paparan mengeni correlation coefficient.