



UNIVERSITAS GADJAH MADA  
DEPARTEMEN TEKNIK SIPIL DAN LINGKUNGAN  
PRODI MAGISTER TEKNIK SIPIL

**Statistika Teknik**

# **Probabilitas**

# Probabilitas

- Probabilitas – Peluang – Kemungkinan
- Mengapa probabilitas ?
  - Orang tidak dapat memastikan nilai suatu proses (misal erupsi gunung berapi) berdasarkan data erupsi selama waktu yang lalu sampai saat ini.
  - Sifat stokastik ataupun ketidak-pastian merupakan sifat yang melekat pada proses (yang melibatkan) alam.

# Probabilitas, Peluang Kejadian

No urut	Jumlah hari terjadinya kemacetan pasokan air per bulan	Frekuensi
1	10	2
2	9	1
3	8	0
4	7	2
5	6	3
6	5	5
7	4	4
8	3	8
9	2	3
10	1	2
	Jumlah	30

Jumlah hari saat terjadi kemacetan pasokan air PDAM selama 30 bulan terakhir.

Dapatkah Saudara memastikan jumlah hari akan terjadi kemacetan pasokan air PDAM pada bulan depan?

# Probabilitas, Peluang Kejadian, Risiko

Tahun ke-	Debit (m <sup>3</sup> /s)	Tahun ke-	Debit (m <sup>3</sup> /s)	Tahun ke-	Debit (m <sup>3</sup> /s)
1	473	23	1110	45	843
2	544	24	717	46	450
3	872	25	961	47	284
4	657	26	925	48	460
5	915	27	341	49	804
6	535	28	690	50	550
7	678	29	734	51	729
8	700	30	991	52	712
9	669	31	792	53	468
10	347	32	626	54	841
11	580	33	937	55	613
12	470	34	687	56	871
13	663	35	801	57	705
14	809	36	323	58	777
15	800	37	431	59	442
16	523	38	770	60	206
17	580	39	536	61	850
18	672	40	708	62	829
19	115	41	894	63	887
20	461	42	626	64	602
21	524	43	1120	65	403
22	943	44	440	66	505

Dapatkan  
Saudara  
memastikan  
debit  
maksimum  
pada tahun  
ke-67?

# Probabilitas

## ■ Definisi #1

- Andaikata suatu peristiwa random dapat terjadi dalam  $n$  cara yang masing-masing memiliki kemungkinan yang sama, dan apabila sejumlah  $n_a$  cara memberikan hasil  $A$ , maka probabilitas terjadinya peristiwa dengan hasil  $A$  adalah  $n_a/n$

$$\text{prob}(A) = \frac{n_a}{n}$$

- Dalam definisi di atas,  $n$  adalah **himpunan semua yang mungkin terjadi**.
- Definisi di atas berasumsi bahwa  $n$  diketahui, padahal **himpunan semua cara yang mungkin** pada kenyataannya **tidak selalu diketahui** atau **tidak terjadi** atau **tidak diamati** atau **tidak dihitung**.

# Probabilitas

## ■ Definisi #2

- Andaikata suatu peristiwa random terjadi berkali-kali dalam jumlah yang sangat besar,  $n$  kali, dan sejumlah  $n_a$  kali memiliki hasil  $A$ , maka probabilitas peristiwa dengan hasil  $A$  adalah

$$\text{prob}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_a}{n}$$

- Definisi di atas berbeda dengan definisi #1 dalam hal-hal berikut:
  - Probabilitas suatu kejadian “diperkirakan” (*can be estimated*) berdasarkan observasi sejumlah  $n$  kali.
  - $n$  di sini tidak/bukan merupakan himpunan semua kejadian yang mungkin; dalam hal ini, tidak diperlukan untuk mengetahui atau melakukan observasi terhadap semua kemungkinan
  - Setiap cara yang mungkin terjadi (dalam  $n$  tersebut) tidak harus memiliki kemungkinan yang sama untuk terjadi.

# Probabilitas

## ■ Definisi 2: butuh berapa $n$ ?

### • Contoh

- Pada 2 set pengamatan (sampel) yang tidak saling terkait/tergantung, perkiraan probabilitas kejadian  $A$  dapat ditetapkan berdasarkan masing-masing sampel tersebut.
- Kedua nilai probabilitas tidak selalu sama satu dengan yang lain.
- Kedua nilai probabilitas tidak selalu sama dengan perkiraan probabilitas  $A$  yang ditetapkan dengan pengamatan sejumlah tak-berhingga kali.
- Problem: berapa jumlah pengamatan  $n$  yang diperlukan untuk mendapatkan estimasi probabilitas  $A$  yang dapat diterima?

# Probabilitas

- Kisaran (*range*) probabilitas
  - Dari kedua definisi, kisaran probabilitas adalah 0 s.d. 1.
  - $\text{prob}(A) = 0$             “hampir” tidak mungkin terjadi  
(*nearly impossible*)
  - $\text{prob}(A) = 1$             “hampir” pasti terjadi  
(*almost certain*)



# Probabilitas

- Misal suatu eksperimen (proses) menghasilkan sejumlah output yang berupa variable random
  - Himpunan semua hasil yang mungkin didapat disebut *sample space*.
  - Setiap elemen di dalam sample space disebut *sample points (element)*
  - Setiap elemen di dalam sample space memiliki *faktor/bobot/weight* (positif) sedemikian hingga jumlah *weight* seluruh elemen bernilai 1.
  - Nilai bobot berbanding lurus dengan kemungkinan eksperimen akan memberikan hasil elemen tersebut.
  - Bobot tidak lain adalah probabilitas.

**Statistika Teknik**

# **Organisasi Data: Tabel dan Grafik**

# Organisasi Data

- Koleksi data statistik perlu disusun (diorganisir) sedemikian hingga dapat “dibaca” dengan jelas.
- Salah satu pengorganisasian data statistik adalah dengan:
  - tabel
  - grafik

# Organisasi Data

- Tabel
  - Di dalam tabel, setiap *raw score* (“data mentah”) sejenis dikelompokkan.
  - Pengelompokan tersebut kemudian dirangkum dalam suatu tabel yang ringkas.

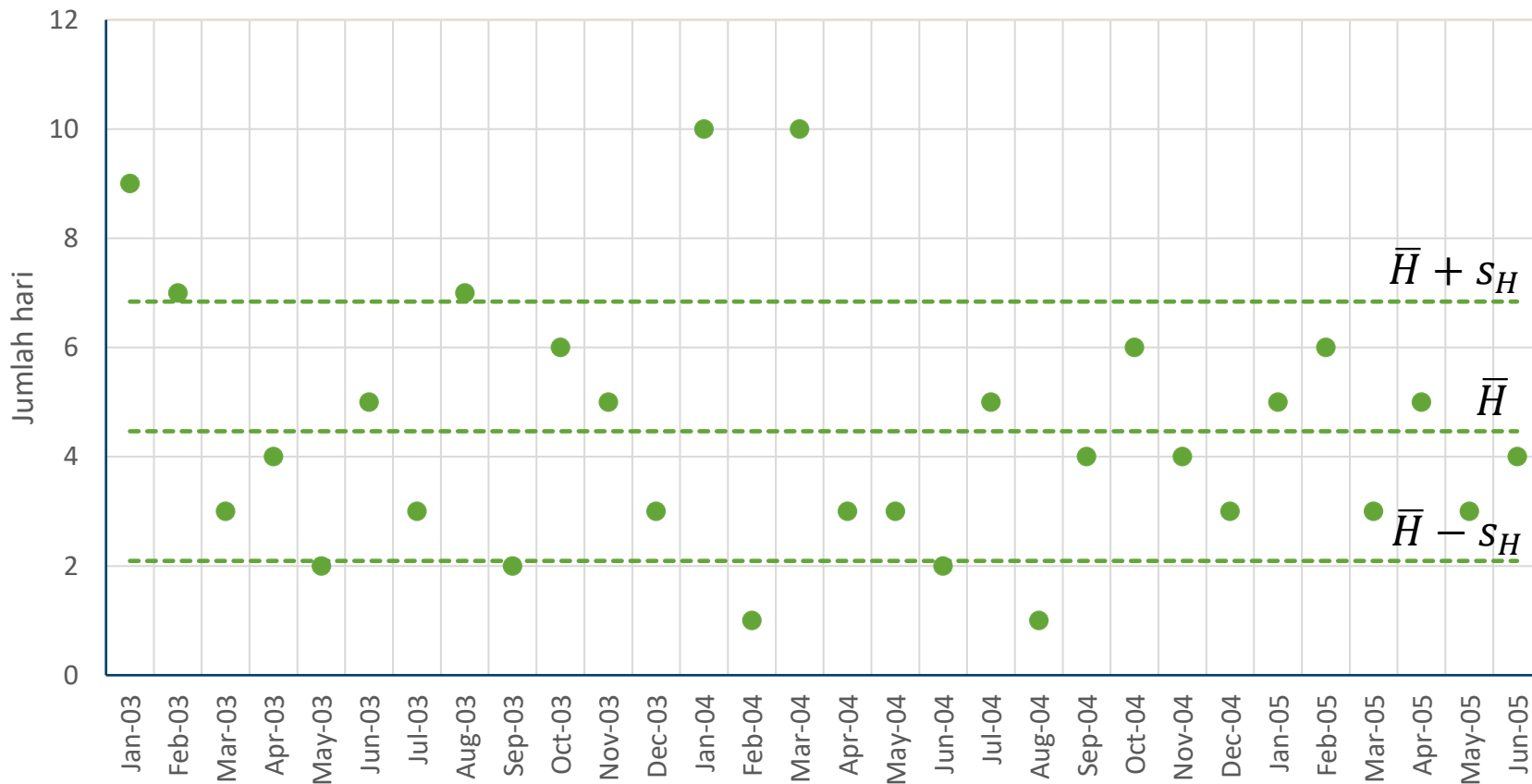
# Contoh #1

- Data hujan harian di suatu stasiun selama 30 bulan selama Januari 2003 s.d. Juni 2005
  - Hari hujan per bulan

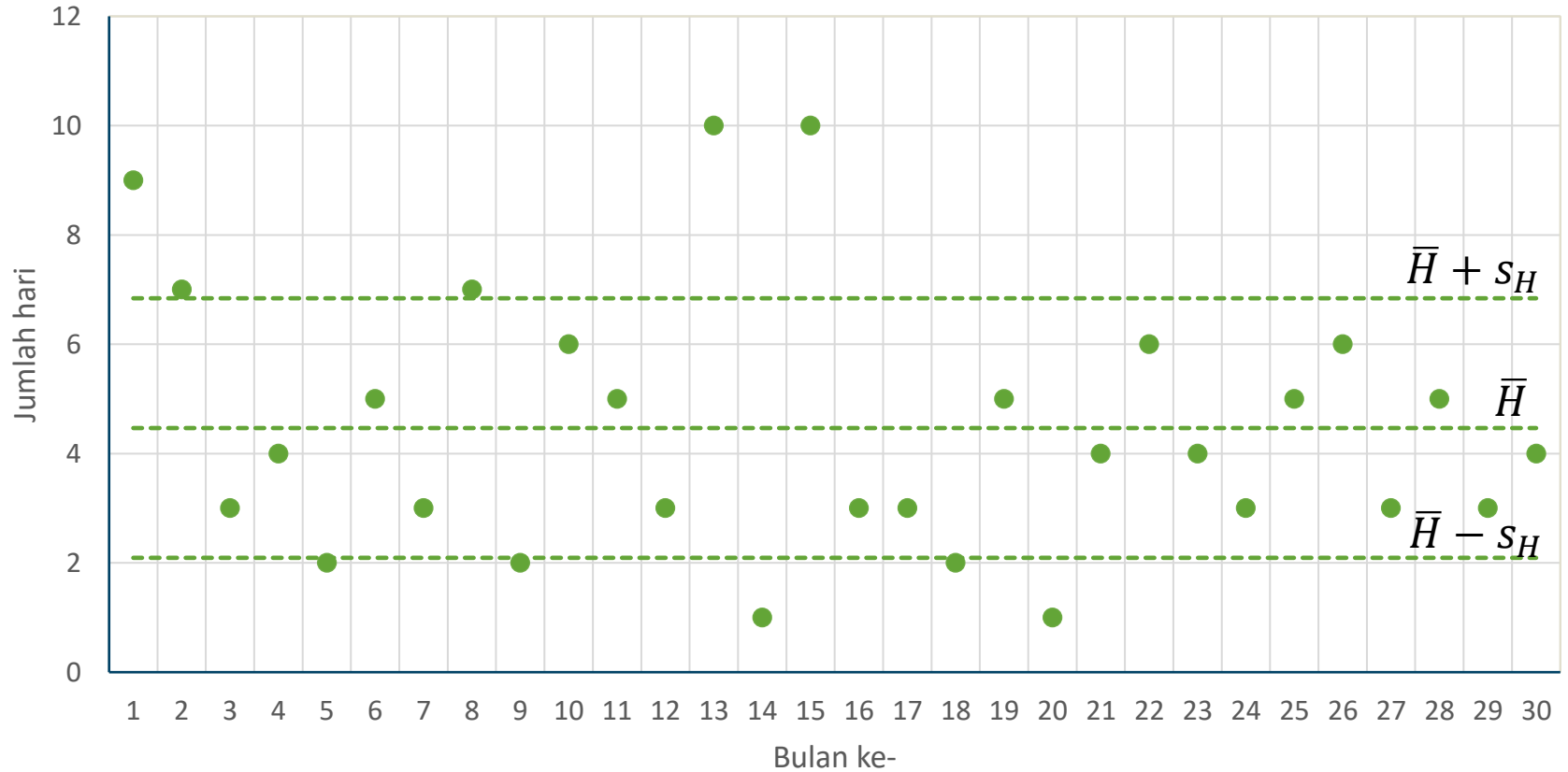
# Hari hujan Januari 2003 s.d. Juni 2005

Bulan	Bulan ke-	Tanggal																															Jumlah			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31				
Jan-03	1	1					1	1					1									1			1	1									9	
Feb-03	2			1		1						1			1				1	1	1													7		
Mar-03	3			1																										1		1		3		
Apr-03	4							1							1							1												4		
May-03	5					1	1																											2		
Jun-03	6		1										1	1	1																			5		
Jul-03	7												1	1																				3		
Aug-03	8	1			1				1									1							1	1						1		7		
Sep-03	9												1									1												2		
Oct-03	10			1				1						1						1				1			1							6		
Nov-03	11												1							1					1							1		5		
Dec-03	12				1		1					1																				1		3		
Jan-04	13	1	1			1		1			1					1	1	1						1	1						1			10		
Feb-04	14																					1												1		
Mar-04	15			1		1		1		1				1		1		1				1												10		
Apr-04	16																								1	1	1							3		
May-04	17		1												1																	1		3		
Jun-04	18																															1	1		2	
Jul-04	19						1	1	1	1	1																								5	
Aug-04	20															1																			1	
Sep-04	21	1	1	1	1																														4	
Oct-04	22							1					1					1						1						1	1				6	
Nov-04	23		1		1														1			1													4	
Dec-04	24																		1	1	1														3	
Jan-05	25					1	1							1						1				1											5	
Feb-05	26									1				1				1					1			1									6	
Mar-05	27												1			1																			3	
Apr-05	28				1		1		1												1	1													5	
May-05	29																															1	1	1		3
Jun-05	30		1	1									1	1																					4	

# Jumlah hari hujan per bulan Januari 2003 s.d. Juni 2005



## Jumlah hari hujan per bulan dalam 30 bulan





## Tabel Frekuensi: jumlah hari hujan per bulan Jan-03 s.d. Jun-05

Jumlah hari hujan per bulan	Frekuensi
10	2
9	1
8	0
7	2
6	3
5	5
4	4
3	7
2	3
1	2
0	1
Jumlah	30

## Tabel Frekuensi: jumlah hari hujan per bulan Jan-03 s.d. Jun-05

Jumlah hari hujan per bulan	Frekuensi
10	2
9	1
8	0
7	2
6	3
5	5
4	4
3	7
2	3
1	2
0	1
Jumlah	30

Jumlah hari hujan per bulan	Frekuensi
0	1
1	2
2	3
3	7
4	4
5	5
6	3
7	2
8	0
9	1
10	2
Jumlah	30

# Bar Chart

Jumlah hari hujan per bulan dalam 30 bulan



# Bar Chart

Jumlah hari hujan per bulan dalam 30 bulan



# Histogram

Jumlah hari hujan per bulan dalam 30 bulan



# Histogram

Jumlah hari hujan per bulan dalam 30 bulan



# Probabilitas, Peluang Kejadian

Jumlah hari hujan per bulan	Frekuensi	Frekuensi relatif
10	2	0.07
9	1	0.03
8	0	0.00
7	2	0.07
6	3	0.10
5	5	0.17
4	4	0.13
3	7	0.23
2	3	0.10
1	2	0.07
0	1	0.03
Jumlah	30	1.00

untuk jumlah sampel yang besar, maka nilai frekuensi relatif dapat dipakai sebagai estimasi nilai probabilitas

# Probabilitas - Histogram

Jumlah hari hujan per bulan dalam 30 bulan





# Probabilitas - Histogram

Jumlah hari hujan per bulan dalam 30 bulan



# Contoh #2

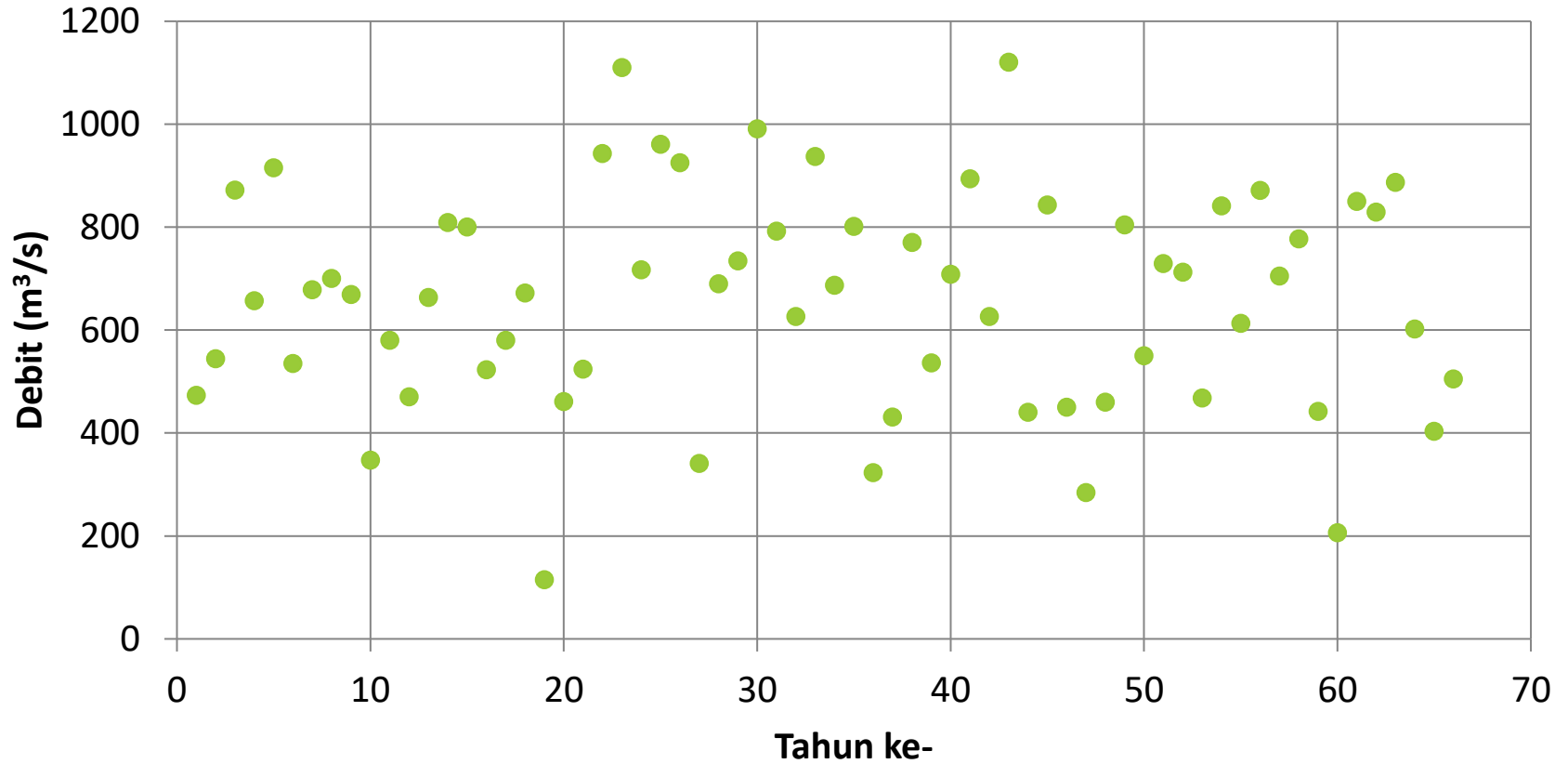
- Data debit puncak suatu sungai selama kurun 66 tahun
  - Debit dikelompokkan ke dalam klas dengan lebar interval tertentu
  - Frekuensi kejadian debit pada setiap klas dihitung

gunakan perintah fungsi MExcel: =FREQUENCY(...)

## Debit puncak suatu Sungai XYZ selama 66 tahun

Tahun ke-	Debit (m <sup>3</sup> /s)	Tahun ke-	Debit (m <sup>3</sup> /s)	Tahun ke-	Debit (m <sup>3</sup> /s)
1	473	23	1110	45	843
2	544	24	717	46	450
3	872	25	961	47	284
4	657	26	925	48	460
5	915	27	341	49	804
6	535	28	690	50	550
7	678	29	734	51	729
8	700	30	991	52	712
9	669	31	792	53	468
10	347	32	626	54	841
11	580	33	937	55	613
12	470	34	687	56	871
13	663	35	801	57	705
14	809	36	323	58	777
15	800	37	431	59	442
16	523	38	770	60	206
17	580	39	536	61	850
18	672	40	708	62	829
19	115	41	894	63	887
20	461	42	626	64	602
21	524	43	1120	65	403
22	943	44	440	66	505

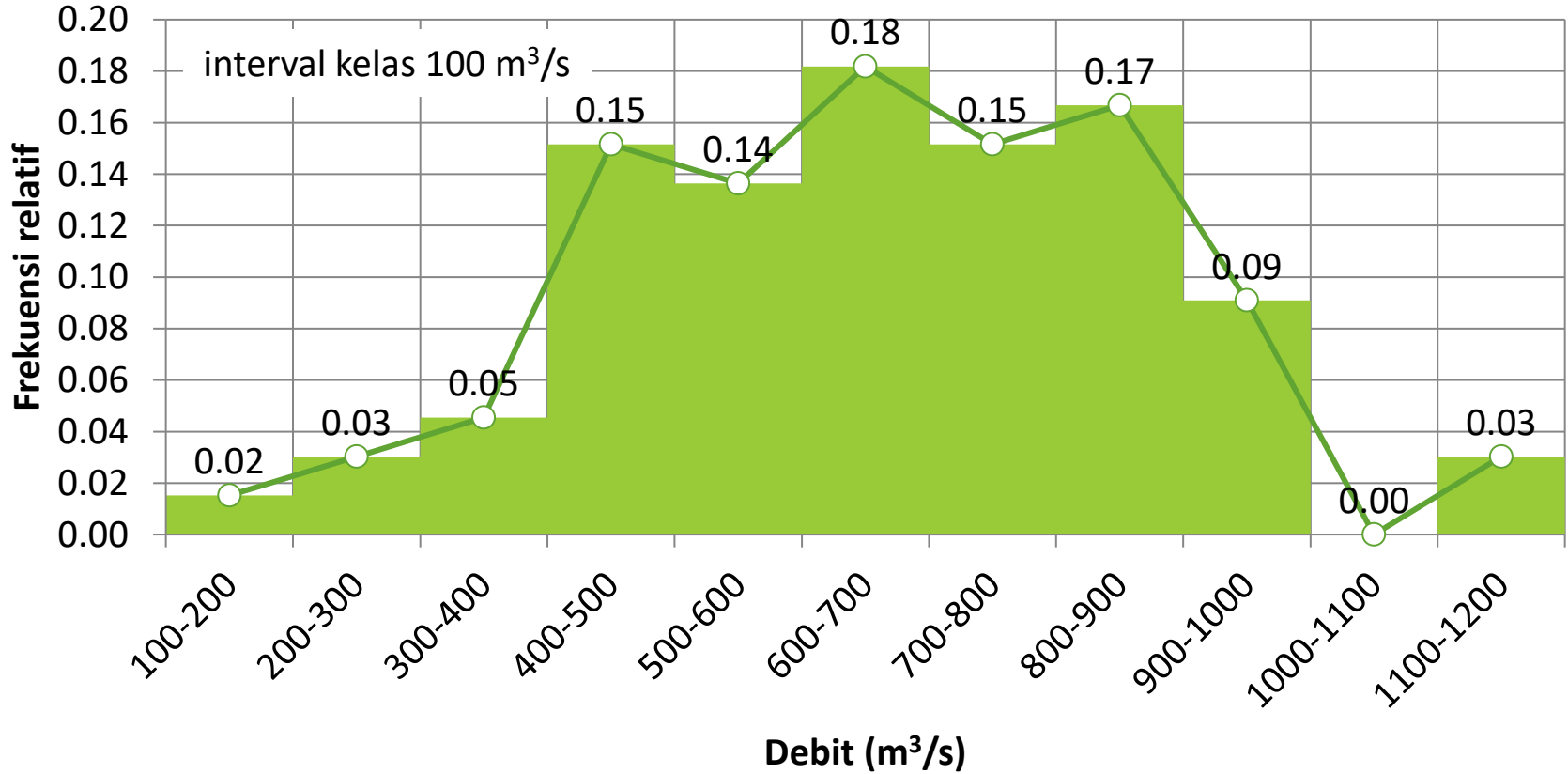
## Debit puncak tahunan suatu sungai selama 66 tahun



# Tabel Frekuensi

Interval Klas	Klas	Frekuensi	Frekuensi relatif	Frek rel kumulatif
100 – 200	150	1	0.02	0.02
200 – 300	250	2	0.03	0.05
300 – 400	350	3	0.05	0.09
400 – 500	450	10	0.15	0.24
500 – 600	550	9	0.14	0.38
600 – 700	650	12	0.18	0.56
700 – 800	750	10	0.15	0.71
800 – 900	850	11	0.17	0.88
900 – 1000	950	6	0.09	0.97
1000 – 1100	1050	0	0.00	0.97
1100 – 1200	1150	2	0.03	1.00
	<b><math>\Sigma</math></b>	<b>66</b>	<b>1.00</b>	

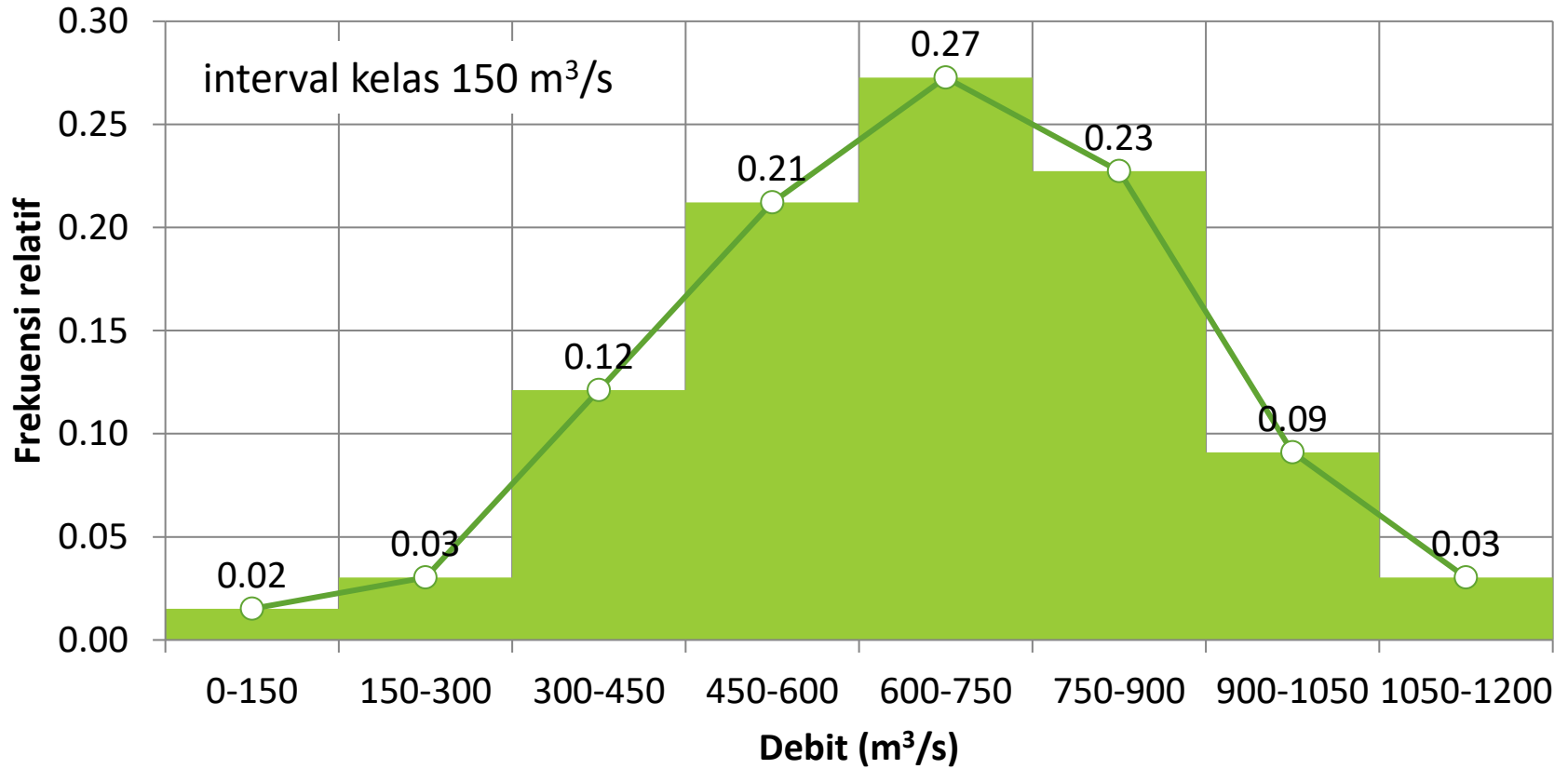
## Debit puncak tahunan suatu sungai dalam 66 tahun



## Tabel Frekuensi

Interval Klas	Klas	Jumlah	Frekuensi relatif	Frek rel kumulatif
0 – 150	75	1	0.02	0.02
150 – 300	225	2	0.03	0.05
300 – 450	375	8	0.12	0.17
450 – 600	525	14	0.21	0.38
600 – 750	675	18	0.27	0.65
750 – 900	825	15	0.23	0.88
900 – 1050	975	6	0.09	0.97
1050 – 1200	1125	2	0.03	1.00
	<b><math>\Sigma</math></b>	<b>66</b>	<b>1.00</b>	

## Debit puncak tahunan suatu sungai selama 66 tahun





# Klas vs Nilai Parameter Statistika

- Adakah pengaruh pengelompokan data terhadap nilai-nilai parameter statistika?
  - Rerata
  - Simpangan baku

**Statistika Teknik**

***Sample Space***

***Sample Elements***

# *Sample Space dan Sample Elements*

- Contoh #1:
  - Suatu DAS memiliki 3 stasiun: Sta-1, Sta-2, Sta-3.
  - Eksperimen: meneliti setiap stasiun perlu/tidak kalibrasi
  - Output:  $(y, n, y)$ 
    - Sta-1 perlu kalibrasi ( $y = \text{yes}$ )
    - Sta-2 tak perlu kalibrasi ( $n = \text{no}$ )
    - Sta-3 perlu kalibrasi ( $y = \text{yes}$ )

# Sample Space dan Sample Elements

- *Sample space*: Alternatif 1
  - $S_1 = \{(y,y,y), (y,y,n), (y,n,y), (n,y,y), (y,n,n), (n,y,n), (n,n,y), (n,n,n)\}$
  - $S_1$  adalah discrete sample space: jumlah elemen di dalam  $S_1$  dapat dihitung.
  - Apabila eksperimen dilakukan satu kali saja, maka salah satu elemen  $S_1$  pasti terjadi.
- *Sample space*: Alternatif 2
  - $S_2 = \{0,1,2,3\}$
  - $S_2$  adalah discrete sample space.
  - Hanya ingin diketahui jumlah stasiun yang perlu dikalibrasi.
  - Tidak diperlukan untuk mengetahui stasiun mana yang perlu dikalibrasi.
  - Informasi yang diperoleh lebih sedikit daripada  $S_1$ .

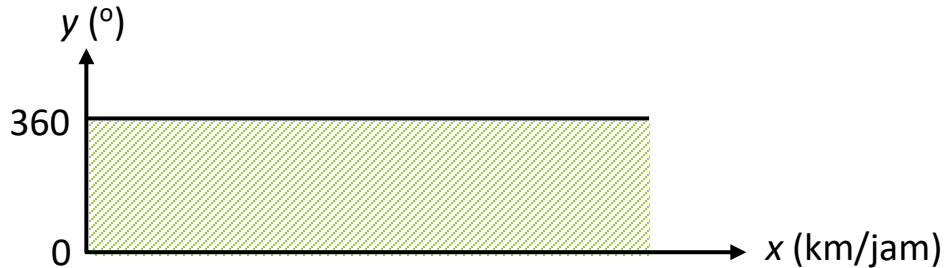
# *Sample Space dan Sample Elements*

- Contoh #2:
  - Pengukuran angin:
    - kecepatan (km/jam) dan
    - arah ( $^{\circ}$ ).
  - Output:  $(x,y)$ 
    - $x$  = kecepatan (km/jam)
    - $y$  = arah ( $^{\circ}$ )

# Sample Space dan Sample Elements

- *Sample space*: Alternatif 1

$$\Omega_1 = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y \leq 360\} \quad \text{continuous sample space}$$



- *Sample space*: Alternatif 2

$$\Omega_2 = \{+, -\} \quad \text{discrete sample space}$$

- + = kecepatan > 60 (km/jam)
- - = kecepatan < 60 (km/jam)

# Events

- *Event* adalah suatu himpunan bagian (*subset*) dari *sample space*
- Suatu *event* terjadi jika dan hanya jika hasil dari eksperimen adalah anggota *event* tersebut
- Contoh: Kalibrasi Sta-1, Sta-2, Sta-3
  - *Event A*: paling sedikit 2 stasiun perlu dikalibrasi  
 $A = \{(y,y,y), (y,y,n), (y,n,y), (n,y,y)\}$
  - *Event B*: tak ada stasiun yang perlu dikalibrasi  
 $B = \{(n,n,n)\}$
  - *Event C*: 2 stasiun perlu dikalibrasi  
 $C = \{(y,y,n), (y,n,y), (n,y,y)\}$

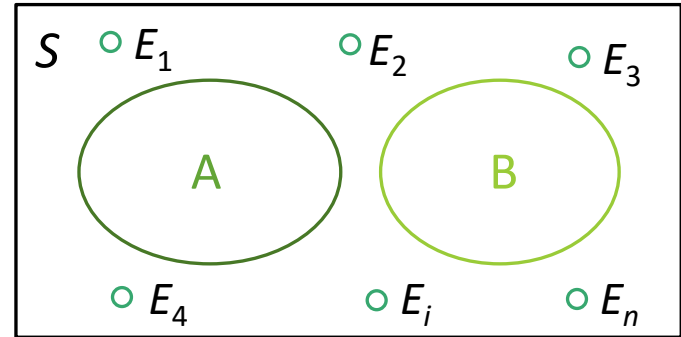
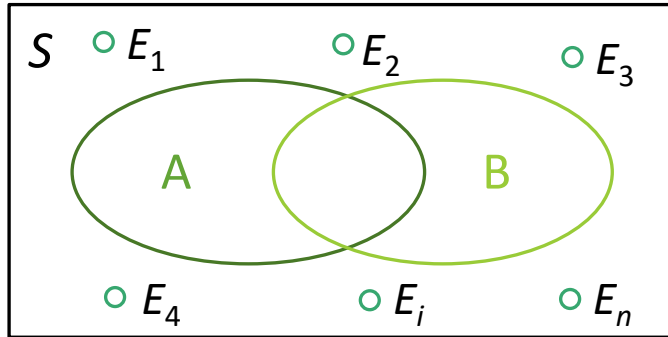
# Diagram Venn

- Notasi:  
 $S$  = *sample space*  
 $E_i$  = elemen di dalam  $S$   
 $A, B$  = *events* di dalam  $S$   
 $\text{prob}(E_i)$  = probabilitas elemen  $E_i$

$$0 \leq \text{prob}(E_1) \leq 1$$

$$S = \bigcup_i E_i$$

$$\text{prob}(S) = \sum \text{prob}(E_i) = 1$$





# Probabilitas Suatu *Event*

- *Event A*

$$A = \bigcup_{i=m}^n E_i$$

$$0 \leq \text{prob}(A) = \sum_{i=m}^n \text{prob}(E_i) \leq 1$$

- *Event A dan B*

$$\text{prob}(A \cup B) = \text{prob}(A) + \text{prob}(B) - \text{prob}(A \cap B)$$

- Apabila *A* dan *B* tak bergantung satu dengan yang lainnya (*independent*), maka

$$\text{prob}(A \cup B) = \text{prob}(A) + \text{prob}(B)$$

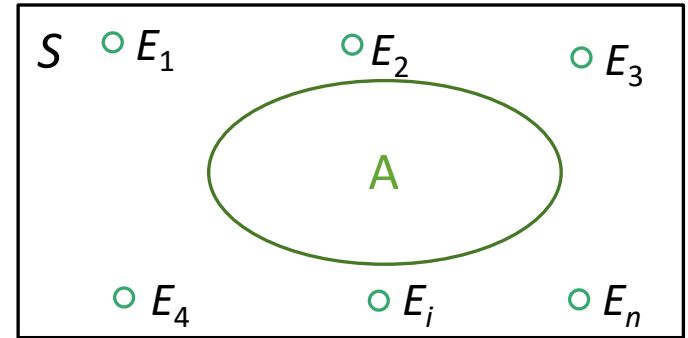
# Probabilitas Suatu *Event*

- *Event*  $A^c$  (= komplemen *event*  $A$ )

$$\text{prob}(A \cap A^c) = 0$$

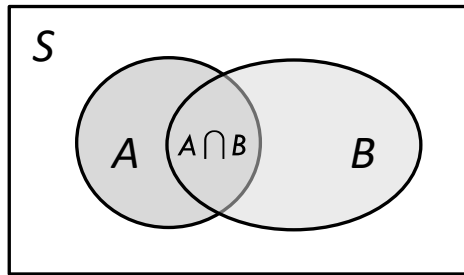
$$\text{prob}(A \cup A^c) = \text{prob}(A) + \text{prob}(A^c) = 1$$

$$\text{prob}(A) = 1 - \text{prob}(A^c)$$



# Probabilitas Bersyarat (Conditional Probability)

- Probabilitas suatu event (*event* B) bergantung pada terjadinya *event* lain (*event* A).



$\text{prob}(B|A) = \text{prob}(B)$  dengan syarat *event* A terjadi

- » *sample space* berubah dari S menjadi A,
- » *event* diwakili oleh  $A \cap B$

$$\text{prob}(B|A) = \frac{\text{prob}(A \cap B)}{\text{prob}(A)}, \quad \text{prob}(A) \neq 0$$

$$\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A)$$

# Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

- Apabila *event* B tak bergantung pada *event* A (keduanya merupakan *independent events*), maka:
  - $\text{prob}(B|A) = \text{prob}(B)$ , dan
  - $\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B)$

# Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

## ■ Contoh

- Data pengamatan hari hujan di suatu wilayah menunjukkan probabilitas hari hujan sbb.  
hari hujan setelah hari hujan = 0.444  
hari tak hujan setelah hari hujan = 0.556  
hari tak hujan setelah hari tak hujan = 0.724  
hari hujan setelah hari tak hujan = 0.276
- Apabila dijumpai bahwa suatu hari terjadi hujan, berapakah probabilitas bahwa 2 hari berikutnya juga hujan?

# Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

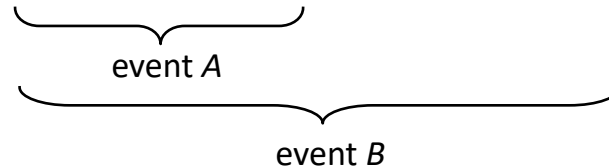
## ■ Penyelesaian

- Misal hari hujan ( $h$ ) terjadi sbb.

hari ke-0  
 $h$

hari ke-1  
 $h$

hari ke-2  
 $h$



- *Event A* = hari ke-1 hujan setelah hari ke-0 hujan
- *Event B* = hari ke-2 hujan setelah hari ke-0 hujan
- Yang dicari adalah 3 hari hujan berturut-turut:

$$\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A)$$

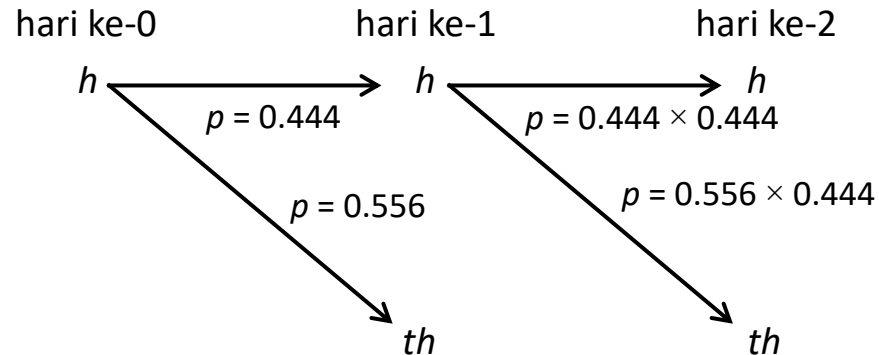
- Diketahui  $\text{prob}(A) = 0.444$

$$\text{prob}B|A = 0.444 \quad (\text{hari hujan setelah hari hujan})$$

$$\text{prob}(A \cap B) = 0.444 \times 0.444 = 0.197$$

# Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

- Cara penyelesaian yang lain
  - Probabilitas hari hujan setelah hari hujan adalah  $p = 0.444$
  - Suatu hari (hari ke-0) terjadi hujan



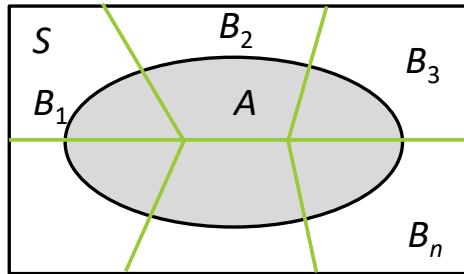
# Probabilitas Total (*Total Probability*)

- Apabila  $B_1, B_2, \dots, B_n$  adalah serangkaian *events* yang tidak saling berkaitan (*mutually exclusive events*) dan masing-masing memiliki probabilitas tidak sama dengan nol,  $\text{prob}(B_i) \neq 0$ , untuk semua  $i$ :
  - $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$
  - $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i, j (i \neq j)$
  - $\text{prob}(B_i) > 0, \forall i$



# Probabilitas Total (*Total Probability*)

- Probabilitas suatu *event*  $A$  dapat dituliskan sbb.



$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

$$\text{prob}(A) = \text{prob}[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)]$$

$$\text{prob}(A) = \text{prob}(A \cap B_1) + \text{prob}(A \cap B_2) + \dots + \text{prob}(A \cap B_n)$$

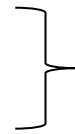
$$\text{prob}(A) = \text{prob}(B_1 \cap A) + \text{prob}(B_2 \cap A) + \dots + \text{prob}(B_n \cap A)$$

# Probabilitas Total (*Total Probability*)

- Dari probabilitas bersyarat (*conditional probability*)

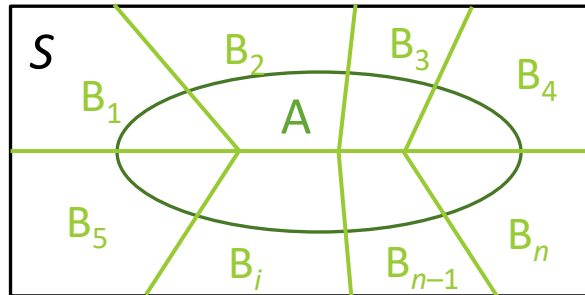
$$\text{prob}(A \cap B_1) = \text{prob}(A)\text{prob}(B_1|A)$$

$$\text{prob}(B_1 \cap A) = \text{prob}(B_1)\text{prob}(A|B_1)$$



$$\text{prob}(A \cap B_1) = \text{prob}(B_1 \cap A) \Rightarrow$$

$$\text{prob}(A)\text{prob}(B_1|A) = \text{prob}(B_1)\text{prob}(A|B_1)$$



$$\text{prob}(A) = \text{prob}(A \cap B_1) + \text{prob}(A \cap B_2) + \dots + \text{prob}(A \cap B_n)$$

$$\text{prob}(A) = \text{prob}(B_1)\text{prob}(A|B_1) + \dots + \text{prob}(B_n)\text{prob}(A|B_n)$$

$$\text{prob}(A) = \sum_{i=1}^n \text{prob}(B_i)\text{prob}(A|B_i)$$

# Probabilitas Total (*Total Probability*)

## ■ Contoh

- Data genangan di suatu wilayah permukiman menunjukkan bahwa probabilitas terjadinya genangan adalah 0.80 saat hari hujan dan 0.25 saat tak hujan.
- Diketahui bahwa probabilitas hari hujan adalah 0.36.
- Berapakah probabilitas terjadinya genangan di wilayah tersebut?

# Probabilitas Total (*Total Probability*)

- Penyelesaian

$$\begin{aligned}\text{prob}(G) &= \text{prob}(H)\text{prob}(G|H) + \text{prob}(H^c)\text{prob}(G|H^c) \\ &= 0.36 \times 0.82 + (1 - 0.36) \times 0.25 \\ &= 0.448\end{aligned}$$

# Teorema Bayes

- Dari *conditional probability*

$$\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{prob}(B \cap A) = \text{prob}(B) \cdot \text{prob}(A|B) \quad \dots\dots\dots (2)$$

- Karena  $\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(B \cap A)$ , maka

$$\text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A) = \text{prob}(B) \cdot \text{prob}(A|B) \quad \dots\dots\dots (3)$$

- Untuk *event*  $A$  dan *event*  $B_j$ , persamaan di atas menjadi

$$\text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B_j|A) = \text{prob}(B_j) \cdot \text{prob}(A|B_j) \quad \dots\dots\dots (4)$$

# Teorema Bayes

- Dari *total probability*

$$\text{prob}(A) = \sum_{i=1}^n \text{prob}(B_i) \cdot \text{prob}(A|B_i) \quad \text{..... (5)}$$

- Dengan (5)  $\rightarrow$  (4)

$$\text{prob}(B_j|A) = \frac{\text{prob}(B_j) \cdot \text{prob}(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n \text{prob}(B_i) \cdot \text{prob}(A|B_i)} \quad \text{..... (6)}$$

# Teorema Bayes

## ■ Pemakaian

- Untuk mencari probabilitas *event*  $B_j$  apabila diketahui *event*  $A$  telah terjadi.
- Untuk mencari (memperkirakan) probabilitas suatu *event* ( $B_j$ ) dengan mengamati *event* kedua ( $A$ ).

# Teorema Bayes

## ■ Contoh

- Informasi ramalan cuaca biasa dikirimkan melalui 4 saluran:  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) adalah event dimana informasi tsb dikirimkan melalui saluran  $i$ .
- Probabilitas masing-masing event  $R_i$  adalah: 0.1, 0.2, 0.3, dan 0.4.
- Diketahui juga bahwa probabilitas terjadinya kesalahan pengiriman (*event*  $E$ ) melalui masing-masing saluran adalah: 0.10, 0.15, 0.20, dan 0.25.
- Suatu saat diketahui bahwa suatu kesalahan pengiriman telah terjadi.
- Berapakah probabilitas bahwa kesalahan tersebut terjadi melalui saluran ke-2?



# Teorema Bayes

## ■ Penyelesaian

- Diketahui

$$\text{prob}(R_1) = 0.1$$

$$\text{prob}(R_2) = 0.2$$

$$\text{prob}(R_3) = 0.3$$

$$\text{prob}(R_4) = 0.4$$

$$\text{prob}(E|R_1) = 0.10$$

$$\text{prob}(E|R_2) = 0.15$$

$$\text{prob}(E|R_3) = 0.20$$

$$\text{prob}(E|R_4) = 0.25$$

- Probabilitas bahwa pengiriman dilakukan melalui saluran ke-2 dengan melihat kenyataan bahwa telah terjadi kesalahan

$$\text{prob}(R_2|E) = \frac{\text{prob}(R_2) \cdot \text{prob}(E|R_2)}{\sum_{i=1}^n \text{prob}(R_i) \cdot \text{prob}(E|R_i)}$$

$$\text{prob}(R_2|E) = \frac{0.2 \times 0.15}{0.1 \times 0.10 + 0.2 \times 0.15 + 0.3 \times 0.20 + 0.4 \times 0.25} = \frac{0.03}{0.20} = 0.15$$

# Teorema Bayes

$i$	$\text{prob}(R_i)$	$\text{prob}(E   R_i)$	$\text{prob}(R_i) \text{prob}(E   R_i)$	$\text{prob}(R_i   E)$
1	0.1	0.10	0.01	0.05
2	0.2	0.15	0.03	0.15
3	0.3	0.20	0.06	0.30
4	0.4	0.25	0.10	0.50
$\Sigma$	<b>1.0</b>		<b>0.20</b>	<b>1.00</b>

prob( $E$ )



**Statistika Teknik**

# **Permutasi dan Kombinasi**

# Permutasi dan Kombinasi

- Cara mendapatkan sampel yang terdiri dari  $r$  elemen dari suatu *sample space* yang memiliki  $n$  elemen ( $n \geq r$ ) → satu elemen per pengambilan
  - urutan elemen diperhatikan dan setelah tiap pengambilan, elemen dikembalikan ke dalam sample space (*ordered with replacement*)
  - urutan elemen diperhatikan dan tidak dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*ordered without replacement*)
  - urutan elemen tidak diperhatikan dan tidak dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*unordered without replacement*)
  - urutan elemen tidak diperhatikan dan dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*unordered with replacement*)

# Permutasi dan Kombinasi

## ■ Contoh ilustrasi

- Dilakukan pemilihan dua stasiun AWLR dari empat stasiun yang ada (A, B, C, D) untuk diberi dana.
- Berapa jumlah pasang stasiun yang mungkin mendapatkan dana?

# Permutasi dan Kombinasi

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ( $r = 2, n = 4$ ) dengan
  - urutan diperhatikan  $\rightarrow$  memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B berbeda dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - dengan pengembalian  $\rightarrow$  suatu stasiun dapat memperoleh dana 2x
- Pasangan 2 stasiun yang mendapatkan dana
  - (A,A)    (A,B)   (A,C)    (A,D)  
(B,A)    (B,B)   (B,C)    (B,D)  
(C,A)    (C,B)   (C,C)    (C,D)     $\rightarrow$      $16 \rightarrow n^r = 4^2 = 16$   
(D,A)    (D,B)   (D,C)    (D,D)

# Permutasi dan Kombinasi


- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ( $r = 2, n = 4$ ) dengan
  - urutan diperhatikan  $\rightarrow$  memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B berbeda dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - tanpa pengembalian  $\rightarrow$  suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 1x
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana
  - --- (A,B) (A,C) (A,D)  
(B,A) --- (B,C) (B,D)  $\rightarrow$   
(C,A) (C,B) --- (C,D)  
(D,A) (D,B) (D,C) ---
- Identik dengan pengambilan 2 elemen sekaligus dari 4 elemen dalam *sample space*

$${}_{(n)}r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

permutasi

# Permutasi dan Kombinasi

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ( $r = 2, n = 4$ ) dengan
  - urutan tidak diperhatikan  $\rightarrow$  memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B sama dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - tanpa pengembalian  $\rightarrow$  suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 1x
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana
  - |       |       |       |
|-------|-------|-------|
| (A,B) | (A,C) | (A,D) |
|       | (B,C) | (B,D) |
|       |       | (C,D) |

  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$
- Identik dengan pengambilan 2 elemen sekaligus dari 4 elemen dalam *sample space*

**kombinasi**  
**koefisien binomial**



# Permutasi dan Kombinasi

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ( $r = 2, n = 4$ ) dengan
  - urutan tidak diperhatikan  $\rightarrow$  memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B sama dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - dengan pengembalian  $\rightarrow$  suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 2x
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana

- (A,A) (A,B) (A,C) (A,D)  
(B,B) (B,C) (B,D)  
(C,C) (C,D)  
(D,D)



$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!r!} = \frac{(4+2-1)!}{(4-2)!2!} = 10$$

- Memilih  $r$  elemen dari  $n$  elemen dengan pengembalian adalah sama dengan memilih  $r$  elemen dari  $n$  elemen tanpa pengembalian

# Resume

	Dengan pengembalian	Tanpa pengembalian
Urutan diperhatikan	$n^r$	$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
Urutan tidak diperhatikan	$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!r!}$	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

Persamaan Sterling:  $n! \approx \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{11}{2}}$

# Perintah (Fungsi) MSeExcel

- $FACT(n)$ 
  - menghitung faktorial,  $n!$
  - $n$  bilangan bulat positif (bilangan cacah)
- $PERMUT(n,r)$ 
  - menghitung permutasi,
  - $n$  dan  $r$  bilangan cacah,  $n \geq r$
- $COMBIN(n,r)$ 
  - menghitung kombinasi,
  - $n$  dan  $r$  bilangan cacah,  $n \geq r$

$${}_{(n)}P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Terima kasih