UNIVERSITAS GADJAH MADA
DEPARTEMEN TEKNIK SIPIL DAN LINGKUNGAN
PRODI MAGISTER TEKNIK SIPIL

Statistika Teknik

Distribusi Probabilitas Diskret

Distribusi Probabilitas Diskret

- Distribusi Hipergeometrik
- Proses Bernoulli
  - Distribusi Binomial
  - Distribusi Geometrik
  - Distribusi Binomial Negatif
- Proses Poisson
  - Distribusi Poisson
  - Distribusi Eksponensial
  - Distribusi Gamma
- Distribusi Multinomial

Distribusi Probabilitas Diskret

Distribusi Hipergeometrik

Distribusi Hipergeometrik

- Situasi
  - Mengambil sampel (random) berukuran n tanpa pengembalian dari suatu populasi berukuran N
  - Elemen-elemen di dalam populasi tersebut terbagi kedalam dua kelompok, masing-masing berukuran k dan $(N - k)$
- Contoh
  - Suatu populasi berupa
    - hari hujan dan hari tak hujan
    - stasiun dengan data baik dan stasiun dengan data jelek
    - sukses dan gagal

Distribusi Hipergeometrik

- Persamaan/rumus
  - Jumlah cara/hasil dari memilih n elemen dari *N* objek adalah kombinasi

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}$$

  - Jumlah cara/hasil dari memilih/memperoleh *x* sukses dan (*n* – *k*) gagal dari suatu populasi yang terdiri dari *k* sukses dan (*N* – *k*) gagal adalah:

$$\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-k} = \frac{k!}{(k-x)!\,x!}\frac{(N-k)!}{(N-k-n+x)!\,(n-x)!}$$

Distribusi Hipergeometrik

- Jadi probabilitas mendapatkan $X = x$ sukses dalam sampel berukuran n yang diambil dari suatu populasi berukuran N yang memiliki k elemen sukses adalah:

$$f_X(x; N, n, k) = \binom{k}{x}\binom{N-k}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}$$

- Distribusi kumulatif dari probabilitas mendapatkan x sukses atau kurang adalah:

$$F_X(x; N, n, k) = \sum_{i=0}^{x} \binom{k}{i}\binom{N-k}{n-i} \Big/ \binom{N}{n}$$

Distribusi Hipergeometrik

- Nilai rerata (*mean*) suatu distribusi hipergeometrik adalah:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{nk}{N}$$

- Varians

$$\mathrm{var}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

  - Catatan

$$x \leq k; x \leq n; k \leq N; n \leq N; (n-x) \leq (N-k)$$

Distribusi Hipergeometrik

- Contoh
  - Suatu DAS memiliki 12 stasiun pengukuran curah hujan dan diketahui bahwa 2 diantaranya dalam keadaan rusak. Manajemen telah memutuskan untuk mengurangi jumlah stasiun menjadi 6 saja.
  - Apabila 6 stasiun dipilih secara acak dari 12 stasiun tersebut, berapakah peluang terpilihnya stasiun rusak sejumlah 2, 1, atau tidak ada sama sekali?

Distribusi Hipergeometrik

- Penyelesaian
  - populasi, N = 12
  - jumlah stasiun rusak, k = 2
  - ukuran sampel, n = 6
  - peluang (*probability*) mendapatkan stasiun rusak sejumlah x = 2, 1, 0 dalam sampel adalah

$$f_X(x; N, n, k) = \binom{k}{x}\binom{N-k}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}$$

Distribusi Hipergeometrik

$$f_X(x; N, n, k) = \binom{k}{x}\binom{N-k}{n-k}\Big/\binom{N}{n}$$

$$x = 2:\ \ f_X(x; N, n, k) = \binom{2}{2}\binom{12-2}{6-2}\Big/\binom{12}{6} = 0.2273$$

$$x = 1:\ \ f_X(x; N, n, k) = \binom{2}{1}\binom{12-2}{6-1}\Big/\binom{12}{6} = 0.5454$$

$$x = 0:\ \ f_X(x; N, n, k) = \binom{2}{0}\binom{12-2}{6-0}\Big/\binom{12}{6} = 0.2273$$

Distribusi Hipergeometrik

- Ekspektasi jumlah stasiun rusak yang ada di dalam sampel adalah

$$\mathrm{E}(X) = \frac{nk}{N} = \frac{6 \times 2}{12} = 1$$

- atau

$$M_1 = \sum_{i=0}^{2} x_i f_X(x_i) = 0 \times 0.2273 + 1 \times 0.5454 + 2 \times 0.2273 = 1$$

Distribusi Probabilitas Diskret

Proses Bernoulli: Distribusi Binomial

Contoh Ilustrasi

- Investigasi thd suatu populasi
  - karakteristik populasi → variabel
  - nilai variabel
    - nilai ujian: 0 s.d. 100
    - status perkawinan: tidak kawin, kawin, cerai, duda/janda
    - usia: 0 s.d. ...
    - cuaca: cerah, berawan, hujan

Contoh Ilustrasi

- Contoh lain
  - Jawaban pertanyaan:
    - ya / tidak
    - benar / salah
    - menang / kalah
    - lulus / tak-lulus
    - sukses / gagal

sukses
vs
gagal

Distribusi Binomial

- Jika
  - variabel hanya memiliki 2 kemungkinan hasil
  - probabilitas (peluang) kedua hasil tersebut tidak berubah (tetap) apa pun hasil eksperimen sebelumnya

Distribusi Binomial

  - probabilitas hasil suatu distribusi binomial
    - prob(sukses) $= p$
    - prob(gagal) $= q = 1 - p$

Distribusi Binomial atau Bukan?

Event	**Binomial ? (True / False)**	**Why ?**
hujan tak-hujan	F	prob kejadian berubah
jenis kelamin warga desa	F	prob kejadian berubah
jenis kelamin bayi yang baru lahir	T	prob tetap

Distribusi Binomial

- Ilustrasi
  - Peluang sukses (S) dalam suatu eksperimen adalah p → prob(S) = p
  - Peluang gagal (G) adalah $q = 1 - p$ → prob(G) = q
  - 1x eksperimen:
    - peluang sukses p
    - peluang gagal q
  - 2x eksperimen:
    - peluang sukses kemudian sukses (S,S): pp
    - peluang sukses kemudian gagal (S,G): pq
    - peluang gagal kemudian sukses (G,S): qp
    - peluang gagal kemudian gagal (G,G): qq

Sukses-Gagal dalam 2× Eksperimen

jumlah sukses	cara sukses	jumlah cara sukses	probabilitas	
2	*SS*	1	pp	$1\ p^2q^0$
1	*SG* atau *GS*	2	$pq + qp$	$2\ p^1q^1$
0	*GG*	1	qq	$1\ p^0q^2$

Sukses-Gagal dalam 3× Eksperimen

jumlah sukses	cara sukses	jumlah cara sukses	probabilitas	
3	SSS	1	1 ppp	1 p^3q^0
2	SSG, SGS, GSS	3	3 ppq	3 p^2q^1
1	SGG, GSG, GGS	3	3 pqq	3 p^1q^2
0	GGG	1	1 qqq	1 p^0q^3

Sukses-Gagal dalam 3× atau 5× Eksperimen

- 3× eksperimen:
  - peluang sukses pada experimen ke-3: *qqp*
  - peluang sukses di salah satu experimen: *pqq* + *qpq* + *qqp*
- 5× eksperimen:
  - peluang sukses 2×: *ppqqq* + *pqpqq* + … + *qqqpp*

$$\binom{5}{2} p^2 q^3 = 10 p^2 q^3$$

Sukses-Gagal dalam 3× atau 5× Eksperimen

- Probabilitas sukses *x* kali dalam *n* kali eksperimen
  - probabilitas sukes di setiap eksperimen adalah *p*
  - *p* tidak berubah apapun hasil eksperimen sebelumnya

distribusi binomial

$$f_X(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

Banjir

- Peluang debit melampaui 100 m^3/s dalam satu tahun adalah p → p = *probability of exceedence* (*success*)
- maka, peluang debit melampaui 100 m^3/s
  - terjadi pada tahun ke-3, tetapi tidak terjadi pada tahun ke-2 dan ke-1 adalah qqp
  - terjadi satu kali pada salah satu tahun dalam periode 3 tahun adalah $pqq + qpq + qqp = 3pq^2$
  - terjadi 2 kali dalam periode 5 tahun adalah $ppqqq + pqpqq + \ldots + qqqpp = 10p^2q^3$

Distribusi Binomial

- Jika
  - peluang sukses *p* dan peluang gagal *q* = 1 – *p*
  - probabilitas sukses *p* tidak berubah apapun hasil eksperimen yang lain
- maka
  - peluang mendapatkan *x* kali sukses dalam *n* kali eksperimen adalah

$$f_X(x;n,p) = \underbrace{\binom{n}{x}}_{\text{koefisien binomial}} p^x (1-p)^{(n-x)} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

Distribusi Binomial

- Distribusi binomial kumulatif

$$F_X(x;n,p) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{(n-i)} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

  - Nilai rerata dan varians

$$\mathrm{E}(X) = np$$

$$\mathrm{var}(X) = npq$$

  - *Skewness coefficient*

$$c_s = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

p = *q* → simetris

q > *p* → *negative skew*

q < p → *positive skew*

Distribusi Binomial

- Contoh #1
  - Setiap tahun dalam 5 tahun dilakukan pemilihan acak untuk menetapkan alokasi dana kepada 1 dari 4 kegiatan (A,B,C,D).
  - Setiap kali dilakukan pemilihan, masing-masing kegiatan memiliki peluang yang sama untuk terpilih (mendapatkan dana).
  - Berapa persen peluang kegiatan A mendapatkan dana 3×?
  - Berapa persen peluang kegiatan A mendapatkan dana 5×, 4×, 3×, 2×, 1×, 0×?

Distribusi Binomial

- Setiap kali pemilihan
  - prob(As) = probabilitas kegiatan A dipilih
    prob(As) = ¼ = 0.25 = *p*
  - prob(Ag) = probabilitas kegiatan A tak dipilih
    prob(Ag) = 1 – *p* = 0.75 = *q*
- Dalam 5 kali pemilihan
  - peluang dipilih (sukses) 3 kali adalah:

$$f_X(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

$$f_X(3; 5{,}0.25) = \binom{5}{3} 0.25^3 (1-0.25)^{(5-3)} = 0.088$$

Distribusi Binomial

- Dalam 5 kali pemilihan (n = 5)

koefisien binomial

jumlah sukses	jumlah cara sukses	peluang sukses
0	1	0.237
1	5	0.396
2	10	0.264
3	10	0.088
4	5	0.015
5	1	0.001
	∑ =	1.000

Distribusi Binomial

- Contoh #2
  - Diketahui probabilitas (risiko) muka air banjir dalam suatu tahun melebihi elevasi *h* m adalah 0.05. Apabila m.a. banjir melebihi *h* m, maka wilayah A akan tergenang.
  - Apabila setiap kejadian banjir adalah *independent* (banjir pada suatu tahun tak bergantung pada banjir pada tahun yang lain), maka kejadian banjir tersebut dapat dipandang sebagai proses Bernoulli.
  - Berapakah risiko (probabilitas) wilayah A tergenang 2 kali dalam periode 20 tahun?

Distribusi Binomial

- Solusi
  - Misal
    - $x =$ jumlah kejadian wilayah A tergenang
    - $n =$ periode (jumlah tahun) yang ditinjau
    - $p =$ risiko m.a. banjir melewati h meter (risiko wilayah A tergenang)
  - maka
    - $x = 2, n = 20, p = 0.05$
  - Jadi

$$f_X(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$f_X(2; 20{,}0.05) = \binom{20}{2} 0.05^2 (1-0.05)^{20-2} = 0.1887$$

Distribusi Binomial

- Contoh #3
  - Agar 90% yakin bahwa debit banjir rancangan yang akan dipilih tidak terlampaui selama periode 10 tahun, berapakah kala ulang debit banjir rancangan tersebut?
- Contoh #4
  - Memperhatikan contoh #3, tariklah kesimpulan mengenai risiko debit banjir kala-ulang T tahun terlampaui paling sedikit 1 kali dalam periode T tahun.

Distribusi Binomial

- Solusi
  - Misal
    - Q_d = debit banjir rancangan
    - p = probabilitas bahwa debit banjir rancangan terlampaui
    - n = 10 tahun
    - x = jumlah tahun debit banjir rancangan terlampaui
  - Probabilitas debit banjir rancangan tak terlampaui adalah:

$$\text{prob}(Q < Q_d) = 90\%$$

Distribusi Binomial

$$f_X(0;10,p) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10}$$

$$0.90 = 1 \times 1 \times (1-p)^{10}$$

$$p = 1 - 0.90^{0.10}$$

$$p = 0.0105$$ ➡ kala ulang banjir $T = 1/T = 95$ tahun

- Jadi untuk memperoleh keyakinan 90% bahwa debit banjir rancangan tak terlampaui dalam 10 tahun, maka diperlukan debit banjir rancangan kala ulang 95 tahun → 100 tahun.

Distribusi Binomial

- Apabila dipilih debit banjir kala ulang 10 tahun (*p* = 10%), maka kemungkinan debit ini dilampaui adalah:

$$
\begin{aligned}
\text{prob}(Q > Q_{10}) &= 1 - f_X(0; 10, 0.10) \\
&= 1 - \binom{10}{0} 0.10^0 (1 - 0.10)^{10} \\
&= 0.651
\end{aligned}
$$

Distribusi Binomial

- Secara umum dapat ditetapkan bahwa risiko debit banjir rancangan kala ulang T tahun terlampaui paling sedikit 1× dalam periode T tahun adalah:

$$\text{prob}(Q > Q_{10}) = 1 - f_X(0; 10{,}0.10)$$

atau

$$1 - 1/e \approx 0.63$$

  - Jadi terdapat 63% kemungkinan bahwa debit kala ulang *T* tahun terlampaui paling sedikit 1× dalam periode *T* tahun.
  - Jika umur rancangan bangunan dan kala ulang rancangan sama, maka risiko sangat besar bahwa debit rancangan tersebut akan dilampaui dalam periode umur rancangan.

Distribusi Probabilitas Diskret

Proses Bernoulli: Distribusi Geometrik

Distribusi Geometrik

- Situasi
  - Suatu *sequence* proses Bernoulli, namun ingin diketahui probabilitas sukses yang pertama kali terjadi
  - Jika pada pengamatan (eksperimen) ke-x diperoleh sukses pertama kali, maka haruslah dimiliki ($x - 1$) kali gagal sebelumnya dan diikuti oleh sekali pengamatan dengan hasil sukses

→ probabilitas → $p^1 \, q^{x-1}$

Distribusi Geometrik

- Probabilitas distribusi geometrik

$$f_X(x;p) = pq^{x-1} = p(1-p)^{(x-1)}$$

- Distribusi geometrik kumulatif

$$F_X(x;p) = \sum_{i=1}^{x} pq^{i-1} = \sum_{i=1}^{x} p(1-p)^{(i-1)} \qquad x = 1,2,3,\ldots$$

  - Berlaku untuk $x \geq 1$
  - Jika $x < 1$, maka $F_X(x;p) = 0$

Distribusi Geometrik

- Nilai rerata

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$$

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1} \qquad x = 1,2,3,\ldots$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}$$

$$= p\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p}(1-p)^{x} = -p\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

- Varians

$$\mathrm{var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

Distribusi Geometrik

- Contoh
  - Berapakah probabilitas suatu banjir 10-tahunan akan terjadi pertama kali dalam 5 tahun pertama setelah proyek selesai?
  - Berapakah probabilitas banjir tersebut akan terjadi pertama kali secepat-cepatnya pada tahun ke-5 setelah proyek selesai?

Distribusi Geometrik

- Solusi
  - Probabilitas banjir terjadi pertama kali pada tahun ke-5 adalah:

$$f_X(x;p) = p(1-p)^{(x-1)}$$

$$f_X(5;0.10) = 0.10 \times (1-0.10)^{(5-1)} = 0.0656$$

Distribusi Geometrik

- Solusi
  - Probabilitas banjir terjadi pertama kali paling cepat pada tahun ke-5 (jadi dapat terjadi pada tahun ke-5, 6, 7, 8, 9, atau 10) dapat dicari dengan memperhatikan bahwa banjir tidak datang selama periode 4 tahun pertama.
  - Dengan demikian probabilitas banjir terjadi pertama kali paling cepat pada tahun ke-5 adalah:

$$q^4 = (1 - 0.10)^4 = 0.6561$$

Distribusi Probabilitas Diskret

Proses Bernoulli: Distribusi Binomial Negatif

Distribusi Binomial Negatif

- Situasi
  - Ingin diketahui probabilitas diperolehnya sukses ke-k terjadi pada eksperimen ke-x (tentu saja $x \geq k$).
  - Dalam hal ini, pastilah terdapat $(k - 1)$ sukses dalam $(x - 1)$ eksperimen, yang mendahului sukses ke-k pada eksperimen ke-x.
  - Probabilitas $(k - 1)$ sukses dalam $(x - 1)$ eksperimen adalah → distribusi binomial:

$$\binom{x-1}{k-1} p^{k-1} q^{x-k}$$

Distribusi Binomial Negatif

- Sedangkan probabilitas sukses pada eksperimen ke-*x* adalah *p*.
- Jadi probabilitas sukses ke-*k* pada pengamatan ke-*x* adalah:

$$f_X(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} \qquad x = k, k+1, \dots$$

- Nilai rerata dan varians

$$\mathrm{E}(X) = \frac{k}{p}$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{kq}{p^2}$$

Distribusi Binomial Negatif

- Contoh
  - Berapakah probabilitas banjir 10-tahunan akan terjadi keempat kalinya pada tahun ke-40?
- Solusi

$$f_X(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$$

$$f_X(40; 4{,}0.10) = \binom{40-1}{4-1} 0.10^4 (1-0.10)^{40-4}$$

$$= \binom{39}{3} 0.10^4 0.90^{36}$$

$$= 0.0206$$

Distribusi Probabilitas Diskret

Proses Poisson: Distribusi Poisson

Distribusi Poisson

- Situasi
  - Proses Bernoulli dalam suatu interval waktu → *p* adalah probabilitas terjadinya suatu event dalam interval waktu tersebut.
  - Jika interval waktu *t* sangat pendek sedemikian hingga probabilitas *p* menjadi kecil dan jumlah pengamatan (eksperimen) *n* bertambah sedemikian hingga *np* konstan, maka
    - ekspektasi jumlah kejadian dalam interval waktu total → tetap

Distribusi Poisson

- Sifat
  - Proses Poisson adalah suatu proses diskret pada skala waktu kontinu.
  - Oleh karena itu, distribusi probabilitas jumlah *event* dalam suatu waktu *T* adalah sebuah distribusi diskret, akan tetapi distribusi probabilitas waktu antar *events* serta waktu sampai ke *event* ke-*n* adalah distribusi kontinu.

Distribusi Poisson

- Probabilitas distribusi poisson

$$f_X(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0,1,2,\ldots \text{ dan } \lambda = np > 0$$

- Distribusi Poisson kumulatif

$$F_X(x;\lambda) = \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

Distribusi Poisson

- Nilai rerata

$$\mathrm{E}(X) = \lambda$$

- Variansi

$$\mathrm{var}(X) = \lambda$$

- *Skewness coefficient*

$$c_s = \lambda^{-1/2}$$

Distribusi Poisson

- Contoh #1
  - Probabilitas banjir 20-tahunan (kala ulang 20 tahun) akan satu kali terjadi dalam 10 tahun:
    - dengan memakai distribusi binomial

$$f_X(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$f_X(1; 10{,}0.05) = \binom{10}{1} 0.05^1 (1-0.05)^{10-1} = 0.315$$

    - dengan memakai distribusi poisson

$$\lambda = np = 10 \times 0.05 = 0.5$$

$$f_X(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \Rightarrow \quad f_X(1; 0.5) = \frac{0.5^1 e^{-0.5}}{1!} = 0.303$$

Distribusi Poisson

- Contoh #2
  - Probabilitas 5 kejadian banjir 2-tahunan dalam 10 tahun adalah:
    - dengan memakai distribusi binomial

$$f_X(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$f_X(5; 10{,}0.5) = \binom{10}{5} 0.5^1 (1-0.5)^{10-5} = 0.246$$

    - dengan memakai distribusi poisson

$$\lambda = np = 10 \times 0.5 = 5$$

$$f_X(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \Rightarrow f_X(5; 5) = \frac{5^5 e^{-5}}{5!} = 0.176$$

n tidak cukup besar untuk mendapatkan pendekatan yang baik dengan distribusi poisson

Distribusi Poisson

- Contoh #3
  - Probabilitas kurang daripada 5 kejadian (maksimum 4 kejadian) banjir 20-tahunan dalam 100 tahun adalah:

$n \gg \implies$ distribusi poisson

$$\lambda = np = 100 \times 0.05 = 5$$

$$\text{prob}(x < 5) = \text{prob}(x \leq 4) = F_X(4; 5)$$

$$F_X(x; \lambda) = \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \Rightarrow F_X(4; 5) = \sum_{i=0}^{4} \frac{5^i e^{-5}}{i!} = 0.44$$

Distribusi Probabilitas Kontinu

Proses Poisson: Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial

- Distribusi probabilitas waktu (interval) *T* di antara kejadian-kejadian suatu *event* dapat dihitung sbb.

$$\text{prob}(T \leq t) = 1 - \text{prob}(T > t)$$

$$\begin{aligned}\text{prob}(T > t) &= \text{ probabilitas tidak terjadi event dalam waktu } t \\ &= f_X(0; \lambda t) \\ &= e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

Distribusi Eksponensial

- Distribusi eksponensial kumulatif, *cumulative distribution function*, cdf

  $$\mathrm{prob}(T \leq t) = P_T(t;\lambda) = 1 - e^{-\lambda t}$$

- *Probability density function*, pdf

  $$p_T(t;\lambda) = \frac{dP_T}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

- Nilai rerata dan varians

  $$\mathrm{E}(T) = \lambda^{-1}$$

  $$\mathrm{var}(T) = \lambda^{-2}$$

Distribusi Probabilitas Kontinu

Proses Poisson: Distribusi Gamma

Distribusi Gamma

- Distribusi probabilitas waktu sampai terjadinya suatu *event* ke-*n* kalinya.
- pdf

$$p_T(t; n, \lambda) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \qquad \begin{array}{l} t > 0 \\ \lambda > 0 \\ n = 1,2, \ldots \end{array}$$

- Nilai rata-rata dan varians

$$\mathrm{E}(T) = \frac{n}{\lambda} \qquad \mathrm{var}(T) = \frac{n}{\lambda^2}$$

Distribusi Gamma

- Contoh
  - Berapakan risiko terjadi banjir ke-4 kalinya dalam waktu 10 tahun jika risiko banjir per tahun adalah 0.10?
- Solusi

$$t = 10, n = 4, \lambda = np = 4 \times 0.10 = 0.4$$

$$p_T(t; n, \lambda) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$$

$$p_T(10; 4{,}0.4) = \frac{0.4^4 10^{4-1} e^{-0.4\times 10}}{(4-1)!} = 0.78$$

Distribusi Probabilitas Kontinu

Distribusi Multinomial

Distribusi Multinomial

- Distribusi binomial: sukses *vs* gagal, *yes vs no*
- Distribusi multinomial
  - hasil $x_1, x_2, \ldots, x_k$
  - prob $p_1, p_2, \ldots, p_k$

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k; p_1, p_2, \ldots, p_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} {p_1}^{x_1} {p_2}^{x_2} \ldots {p_k}^{x_k}$$

$$f_{\underline{X}}\left(\underline{x}; n, \underline{p}\right) = n! \prod_{i=1}^{k} \frac{{p_i}^{x_i}}{x_i!}$$

  - dalam persamaan di atas, $\underline{X}$, $\underline{x}$, dan $\underline{p}$ adalah vektor $1 \times k$
  - syarat: $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ dan $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

Distribusi Multinomial

- Nilai rerata dan varians

$$\mathrm{E}(X_i) = np_i$$

$$\mathrm{var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$$

Distribusi Multinomial

Contoh multinomial distribution

Terima kasih