



Universitas Gadjah Mada
Fakultas Teknik
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan
Prodi Magister Teknik Sipil

Statistika Teknik

Rentang Keyakinan

Rentang Keyakinan

■ Estimasi Parameter

- Distribusi probabilitas memiliki sejumlah parameter.
- Parameter-parameter tsb umumnya tak diketahui.
- Nilai parameter tersebut diperkirakan (di-estimasi-kan) berdasarkan nilai yang diperoleh dari pengolahan data.
- Estimasi
 - Estimasi tunggal (*point estimates*)
 - Rentang keyakinan (*confidence intervals*)

Rentang Keyakinan

■ Estimasi tunggal

- Contoh

- Nilai rata-rata sampel sbg estimasi nilai rata-rata populasi

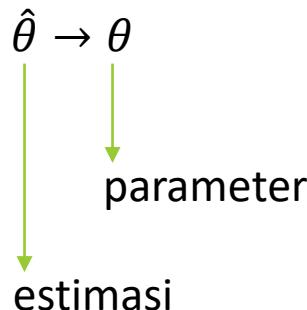
$$\bar{X} \rightarrow \mu$$

- Nilai simpangan baku sampel sbg estimasi nilai simpangan baku populasi

$$s_X \rightarrow \sigma_X$$

Rentang Keyakinan

- Estimasi parameter θ



Dicari suatu interval $[L, U]$ yang memiliki probabilitas $(1 - \alpha)$ bahwa interval tsb mengandung θ

$$\text{prob}(L < \theta < U) = (1 - \alpha) \rightarrow \text{Pers (1)}$$

L = batas bawah rentang keyakinan.

U = batas atas rentang keyakinan.

$(1 - \alpha)$ = tingkat keyakinan (*confidence level, confidence coefficient*).

L dan U = variabel random

Rentang Keyakinan

■ Contoh

- Data debit puncak tahunan Sungai XYZ selama 66 tahun (sampel) menunjukkan bahwa debit rata-rata adalah $660 \text{ m}^3/\text{s}$.
 - Kita dapat memperkirakan debit rata-rata Sungai A (populasi) adalah $660 \text{ m}^3/\text{s}$.
- Kita menyadari bahwa perkiraan tsb dapat salah; bahkan dari sisi pengertian probabilitas, kita tahu bahwa debit rata-rata sama dengan $660 \text{ m}^3/\text{s}$ adalah hampir tidak mungkin terjadi:

$$\text{prob}(\mu_Q = 660 \text{ m}^3/\text{s}) = 0$$

Batas Bawah dan Batas Atas Rentang Keyakinan

- Metode Ostle: *method of pivotal quantities*
 - Dicari variabel random V yang merupakan fungsi parameter θ ($\theta = \text{unknown}$), tetapi distribusi V ini tidak bergantung pada parameter yang tidak diketahui
 - Ditentukan v_1 dan v_2 sedemikian hingga:

$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha \rightarrow \text{Pers. (2)}$$

Batas Bawah dan Batas Atas Rentang Keyakinan

- Metode Ostle: *method of pivotal quantities*

$$\text{prob}(\nu_1 < V < \nu_2) = 1 - \alpha$$

- Persamaan di atas diubah kedalam bentuk
$$\text{prob}(L < \theta < U) = 1 - \alpha$$
- L dan U adalah variabel random dan fungsi V , tetapi bukan fungsi θ

Rentang Keyakinan: μ suatu distribusi normal, σ tidak diketahui

- Mencari interval $[L, U]$ yang mengandung μ ,
 $\text{prob}(L < \mu < U) = 1 - \alpha$
- Misalkan variabel random V :

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{S_{\bar{X}}}$$

- V berdistribusi t dengan $(n - 1)$ degrees of freedom
- n adalah jumlah sampel yang dipakai untuk menghitung nilai rata-rata sampel, \bar{X}

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} \text{ berdistribusi t?}$$

- Bukti

Distribusi t: $X = Y \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{U}}$ $v = \text{degrees of freedom}$

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s_X^2/n}} = \frac{(\bar{X} - \mu)/\sigma}{\sqrt{s_X^2}/\sigma\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{s_X^2/\sigma^2}}$$

$$= \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2/\sigma^2}} = Y \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{U}}$$

$$\rightarrow Y = \frac{\bar{X} - \mu}{v/\sqrt{n}}, \quad U = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}, \quad v = n - 1$$



- Pers. (2)

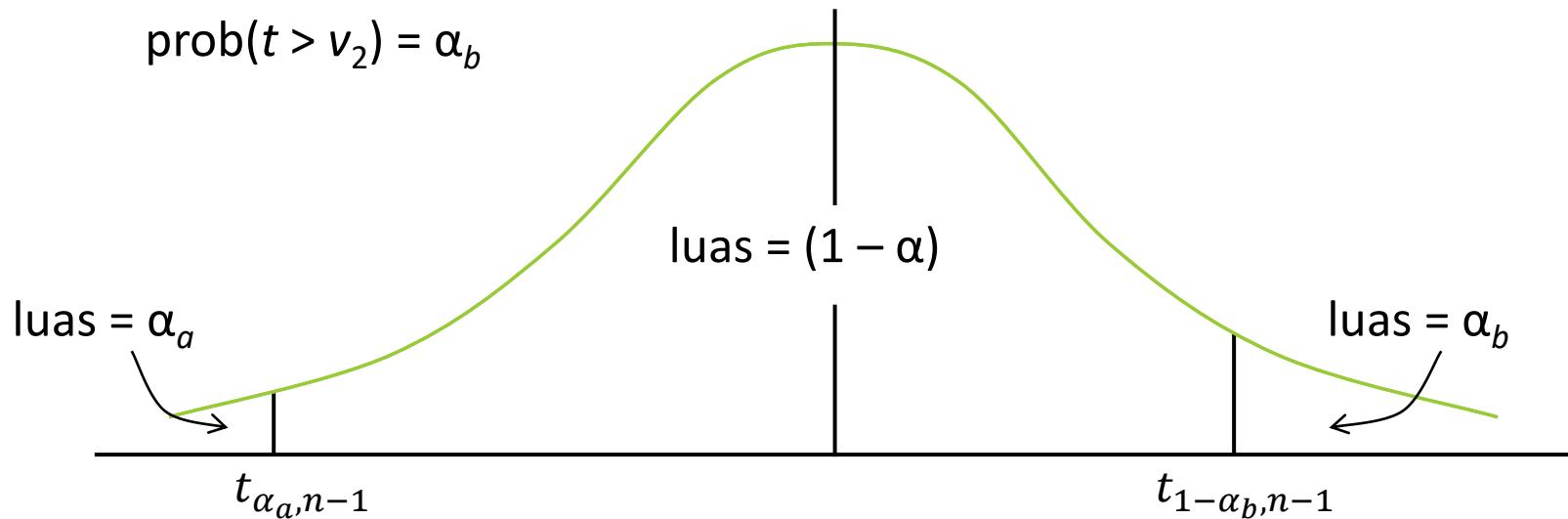
$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha \Rightarrow \text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

$$\alpha_a + \alpha_b = \alpha$$

$$\text{prob}(t < v_1) = \alpha_a$$

dengan $(n - 1)$ degrees of freedom

$$\text{prob}(t > v_2) = \alpha_b$$



$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(t_{\alpha_a, n-1} < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < t_{1-\alpha_b, n-1}\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}(\bar{X} + t_{\alpha_a, n-1} s_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + t_{1-\alpha_b, n-1} s_{\bar{X}}) = 1 - \alpha$$

ℓ u

Jadi, rentang keyakinan (*confidence limits*):

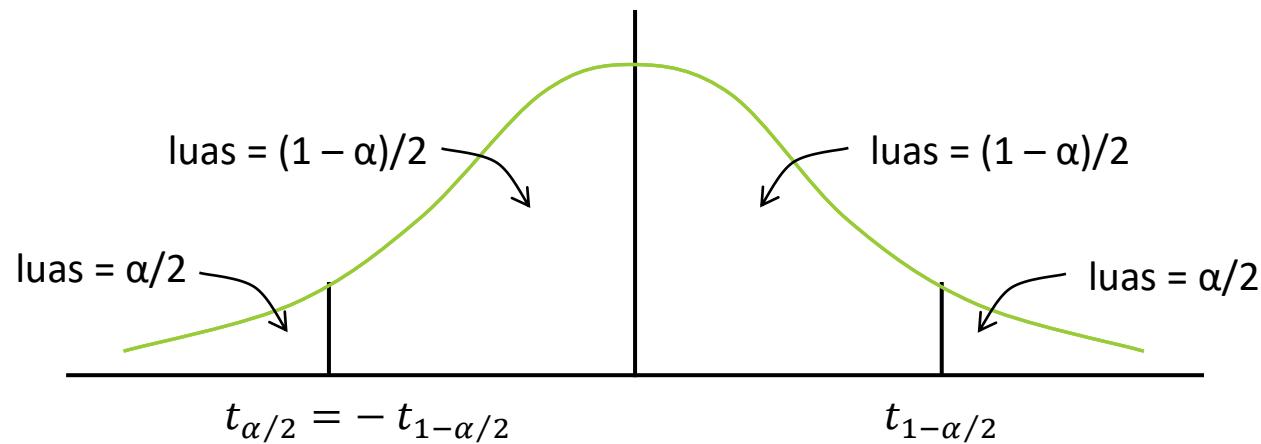
$$\ell = \bar{X} + t_{\alpha_a, n-1} s_{\bar{X}} = \bar{X} + t_{\alpha_a, n-1} \frac{s_X}{\sqrt{n}}$$

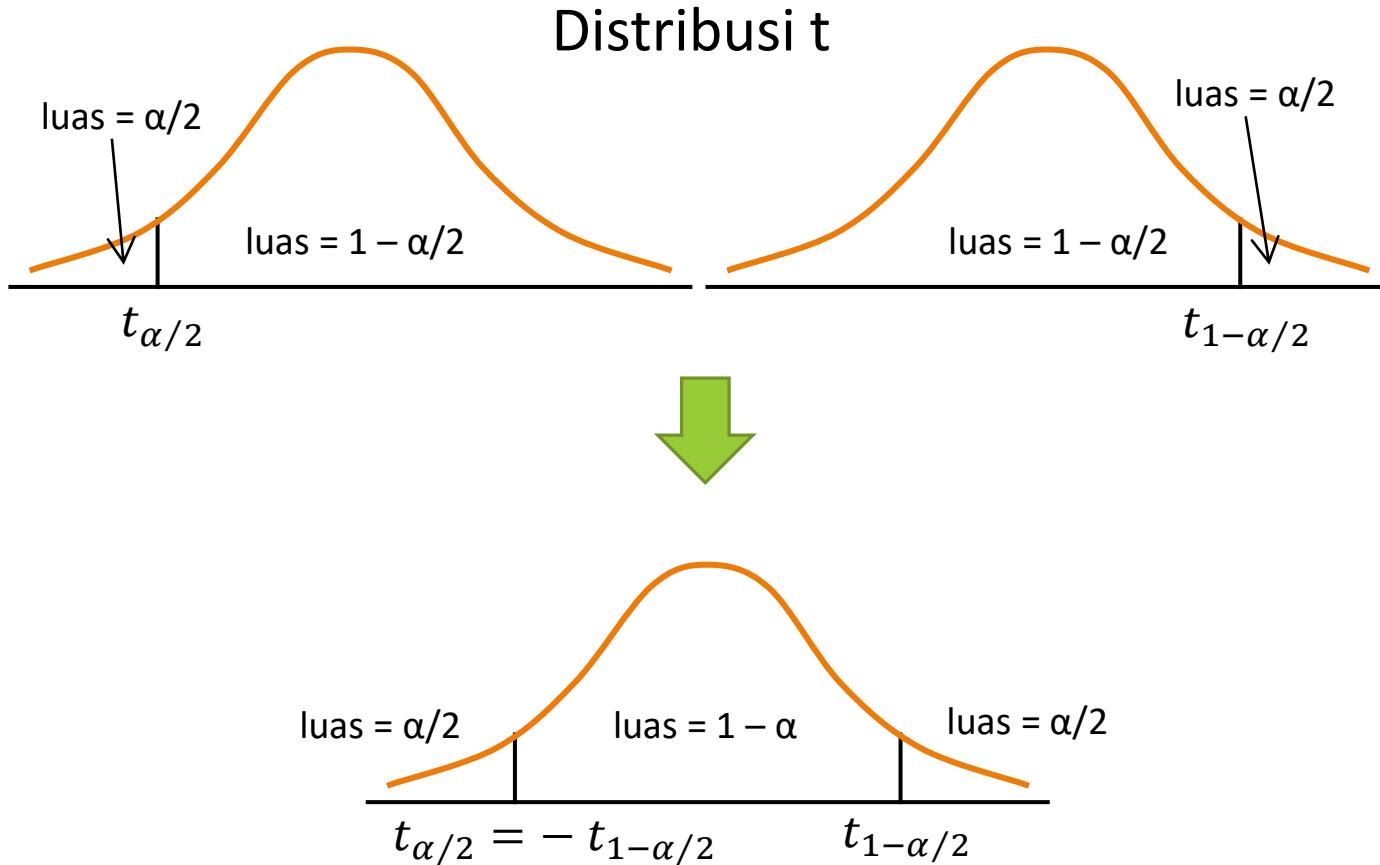
$$u = \bar{X} + t_{1-\alpha_b, n-1} s_{\bar{X}} = \bar{X} + t_{1-\alpha_b, n-1} \frac{s_X}{\sqrt{n}}$$

$t_{\alpha_a, n-1}$ $t_{1-\alpha_b, n-1}$

Tabel
distribusi *t*

- Jika dikehendaki probabilitas rentang keyakinan simetris, maka v_1 dan v_2 dipilih sedemikian hingga $\text{prob}(t < v_1) = \text{prob}(t > v_2)$.
- Karena simetris, maka $\alpha_a = \alpha_b = \alpha/2$
- Yang dicari adalah rentang keyakinan $(1 - \alpha) = 100(1 - \alpha)\%$ maka: $\text{prob}(t < v_1) = \alpha/2 = \text{prob}(t > v_2)$





- Dengan demikian, batas rentang keyakinan jika probabilitas rentang keyakinan simetris adalah:

$$\ell = \bar{X} - t_{1-\alpha/2,n-1} \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

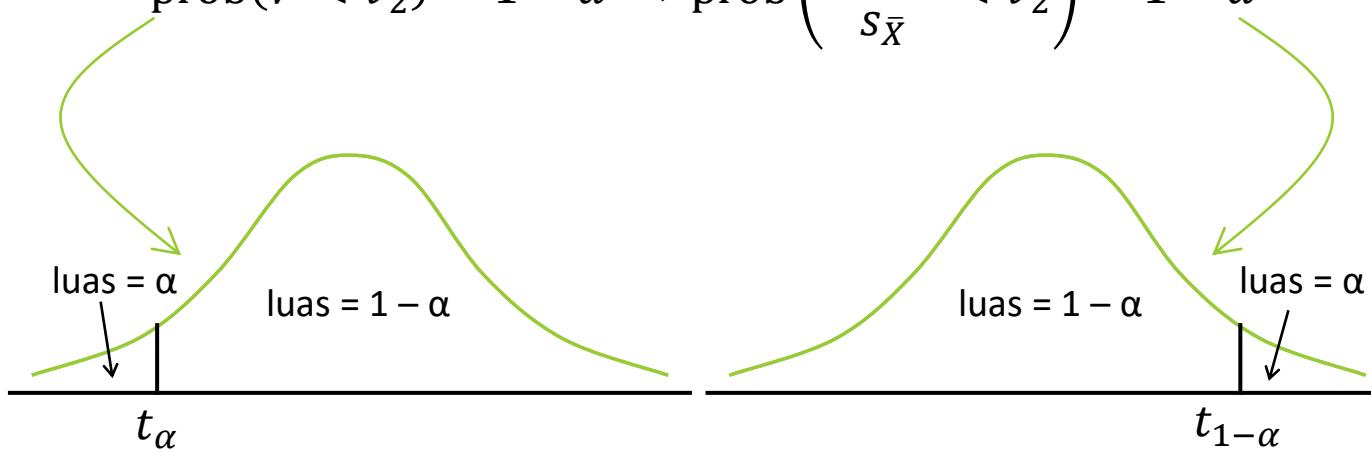
$$u = \bar{X} + t_{1-\alpha/2,n-1} \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

- Kadang dikehendaki probabilitas rentang keyakinan satu sisi

- ❑ batas bawah $\rightarrow \text{prob}(t < v_1) = \alpha$
- ❑ batas atas $\rightarrow \text{prob}(t > v_2) = \alpha$

$$\text{prob}(V > v_1) = 1 - \alpha \Rightarrow \text{prob}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} > v_1\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}(V < v_2) = 1 - \alpha \Rightarrow \text{prob}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$



Distribusi t

■ Notasi

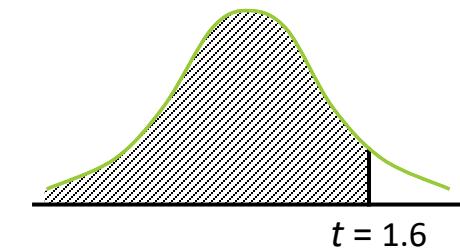
- $t_{\gamma,n}$ = nilai t sedemikian hingga probabilitas variabel random t dengan n *degrees of freedom* adalah lebih kecil daripada γ .
- misalkan:
 $t_{0.95,50}$ = nilai t sedemikian hingga $\text{prob}(t < t_{0.95,50}) = 0.95$ untuk t yang memiliki 50 *degrees of freedom*.

Distribusi t

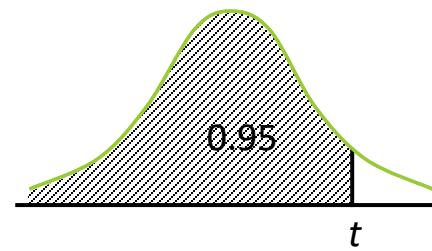
- Dapat dibaca di tabel distribusi t
 - Tabel Distribusi t
- Dapat dihitung dengan perintah/fungsi MSExcel
 - T.DIST(t, v, true)
 - menghitung nilai $\text{prob}(T < t)$
 - untuk menghitung nilai $\text{prob}(T > t) \rightarrow 1 - \text{T.DIST}(t, v, \text{true})$
 - t = nilai yang diinginkan untuk dicari distribusinya
 - v = *degree of freedom*
 - *one-tailed distribution*
 - T.INV(p, v)
 - mencari nilai t jika nilai $p = \text{prob}(T < t)$ diketahui
 - *one-tailed distribution*

Distribusi t

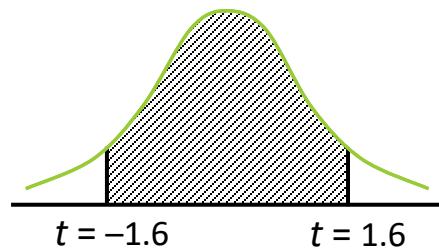
untuk 50 degrees of freedom



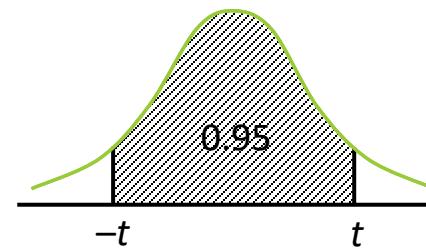
$$\begin{aligned}\text{prob}(T < 1.6) &= \text{T.DIST}(1.6, 50, \text{TRUE}) = 0.942 \\ \text{prob}(T < 1.6) &= 1 - \text{T.DIST.RT}(1.6, 50) = 0.942\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{prob}(T < t) &= 0.95 \\ t &= \text{T.INV}(0.95, 50) = 1.68\end{aligned}$$



$$\text{prob}(-1.6 < T < 1.6) = 1 - \text{T.DIST.2T}(1.6, 50) = 0.884$$



$$\begin{aligned}\text{prob}(-t < T < t) &= 0.95 \\ t &= \text{T.INV.2T}(1 - 0.95, 50) = 2\end{aligned}$$

Rentang Keyakinan: μ suatu distribusi normal, σ diketahui

- Apabila variansi populasi diketahui, maka variabel random V didefinisikan sbb.:

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}, \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

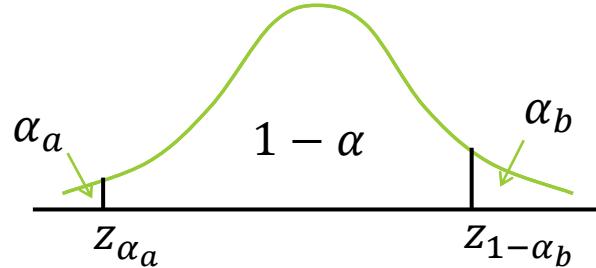
→ V berdistribusi normal

Rentang Keyakinan: μ suatu distribusi normal, σ diketahui

- Rentang keyakinan

$$\ell = \bar{X} + z_{\alpha_a} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

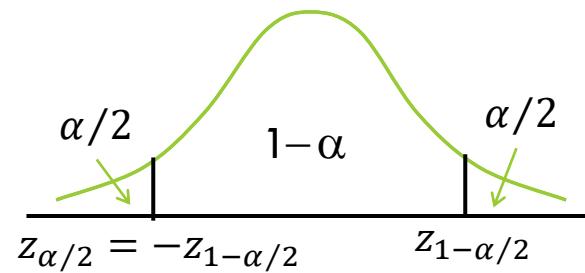
$$u = \bar{X} + z_{1-\alpha_b} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$



- Jika probabilitas rentang keyakinan diinginkan simetris

$$\ell = \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

$$u = \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$



Rentang Keyakinan: σ^2 suatu distribusi normal

- Mencari rentang $[L, U]$ yang mengandung σ^2 dengan peluang $\text{prob}(L < \sigma^2 < U) = 1 - \alpha$.
- Didefinisikan variabel random V :

$$V = \frac{(n - 1)s_X^2}{\sigma_X^2}$$

→ V berdistribusi chi-kuadrat dengan $(n - 1)$ *degrees of freedom*.

$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

Pilih: $v_1 = \chi_{\alpha/2, n-1}^2$

$$v_2 = 1 - \chi_{\alpha/2, n-1}^2$$

sehingga: $\text{prob}\left(\chi_{\alpha/2, n-1}^2 < \frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2} < 1 - \chi_{\alpha/2, n-1}^2\right) = 1 - \alpha$

atau: $\text{prob}\left(\frac{(n-1)s_X^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2} < \sigma_X^2 < \frac{(n-1)s_X^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}\right) = 1 - \alpha$

- Jadi batas bawah dan batas atas rentang yang mengandung σ_X^2 dengan tingkat keyakinan $(1 - \alpha)$ adalah:

- batas bawah:
$$\ell = \frac{(n - 1)s_X^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}$$

- batas atas:
$$u = \frac{(n - 1)s_X^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}$$

Catatan: X berdistribusi normal

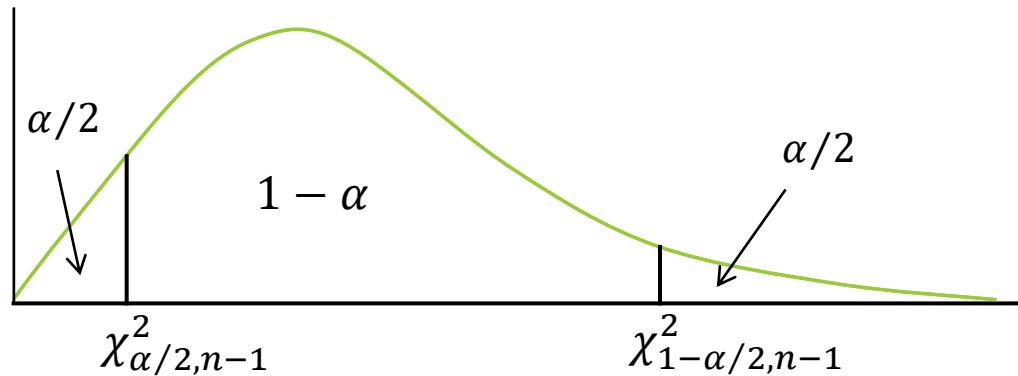
χ^2 berdistribusi chi-kuadrat

- Distribusi chi-kuadrat tidak simetris:

$$s_X^2 - \ell \neq u - s_X^2$$

$n \gg \rightarrow (n - 1) \gg \rightarrow$ distribusi mendekati distribusi simetris,

s_X^2 berada kira-kira di tengah-tengah rentang $[L, U]$.



Rentang Keyakinan Satu Sisi

- Hanya diinginkan satu sisi rentang keyakinan saja
 - hanya batas bawah rentang keyakinan μ

$$\text{prob}(L < \theta) = 1 - \alpha \implies \ell = \bar{X} - t_{1-\alpha, n-1}$$

- hanya batas atas saja rentang keyakinan μ

$$\text{prob}(\theta < U) = 1 - \alpha \implies u = \bar{X} + t_{1-\alpha, n-1}$$

Terima kasih