Universitas Gadjah Mada
Fakultas Teknik
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan
Prodi Magister Teknik Sipil

Statistika Teknik

Distribusi Binomial

Contoh Ilustrasi

- Investigasi thd suatu populasi
  - karakteristik populasi → variabel
  - nilai variabel
    - nilai ujian: 0 s.d. 100
    - status perkawinan: tidak kawin, kawin, cerai, duda/janda
    - usia: 0 s.d. ...
    - cuaca: cerah, berawan, hujan

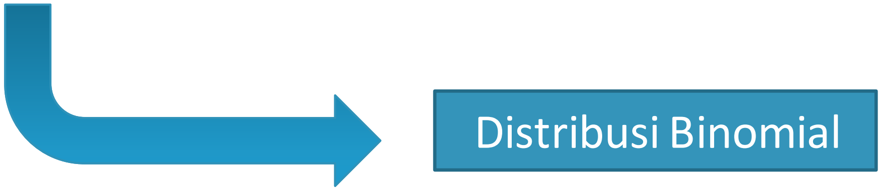
Contoh Ilustrasi

- Contoh lain
  - Jawaban pertanyaan:
    - ya / tidak
    - benar / salah
    - menang / kalah
    - lulus / tak-lulus
    - sukses / gagal

$\left.\right\}$ Sukses *vs* Gagal

Distribusi Binomial

- Jika
  - variabel hanya memiliki 2 kemungkinan hasil
  - probabilitas (peluang) kedua hasil tersebut tidak berubah (tetap) apapun hasil eksperimen sebelumnya



- Probabilitas hasil suatu distribusi binomial
  - prob(sukses) = p
  - probabilitas(gagal) = $q = 1 - p$

Distribusi Binomial atau Bukan?

Event	**Binomial (T/F)?**	**Why?**
hujan, tak hujan	F	prob kejadian berubah
jenis kelamin warga desa	F	prob kejadian berubah
jenis kelamin bayi lahir	T	prob kejadian tetap

Permutasi dan Kombinasi

- Cara mendapatkan sampel yang terdiri dari *r* elemen dari suatu *sample space* yang memiliki *n* elemen ($n \geq r$) → 1 elemen per pengambilan
  - urutan elemen diperhatikan dan setelah tiap pengambilan, elemen dikembalikan ke dalam sample space (*ordered with replacement*)
  - urutan elemen diperhatikan dan tidak dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*ordered without replacement*)
  - urutan elemen tidak diperhatikan dan tidak dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*unordered without replacement*)
  - urutan elemen tidak diperhatikan dan dlakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*unordered with replacement*)

Permutasi dan Kombinasi

- Contoh ilustrasi
  - Dilakukan pemilihan 2 stasiun AWLR dari 4 stasiun yang ada (A, B, C, D) untuk diberi dana.
  - Berapa jumlah pasang stasiun yang mungkin mendapatkan dana?

Permutasi dan Kombinasi

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun (r = 2, n = 4) dengan
  - urutan diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B berbeda dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - dengan pengembalian → suatu stasiun dapat memperoleh dana 2x
- Pasangan 2 stasiun yang mendapatkan dana
  - (A,A) (A,B) (A,C) (A,D)
    (B,A) (B,B) (B,C) (B,D)
    (C,A) (C,B) (C,C) (C,D)
    (D,A) (D,B) (D,C) (D,D)

$$16 \rightarrow n^r = 4^2 = 16$$

Permutasi dan Kombinasi

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun (r = 2, n = 4) dengan
  - urutan diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B berbeda dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - tanpa pengembalian → suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 1x
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana

	(A,B)	(A,C)	(A,D)
(B,A)		(B,C)	(B,D)
(C,A)	(C,B)		(C,D)
(D,A)	(D,B)	(D,C)	

$$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

permutasi

- Identik dengan pengambilan
  2 elemen sekaligus dari
  4 elemen dalam *sample space*

Permutasi dan Kombinasi

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun (r = 2, n = 4) dengan
  - urutan tidak diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B sama dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - tanpa pengembalian → suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 1x
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana
  - (A,B) (A,C) (A,D)
    (B,C) (B,D)
    (C,D)

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6$$

kombinasi
koefisien binomial

- Identik dengan pengambilan 2 elemen sekaligus dari 4 elemen dalam *sample space*

Permutasi dan Kombinasi

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun (r = 2, n = 4) dengan
  - urutan tidak diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B sama dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - dengan pengembalian → suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 2x
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana
  - (A,A) (A,B) (A,C) (A,D)
    (B,B) (B,C) (B,D)
    (C,C) (C,D)
    (D,D)

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$$

$$= \frac{(4+2-1)!}{(4-1)!\,2!} = 10$$

- Memilih r elemen dari n elemen dengan pengembalian adalah sama dengan memilih r elemen dari n elemen tanpa pengembalian

Ringkasan

	Dengan pengembalian	Tanpa pengembalian
Urutan diperhatikan	n^r	$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
Urutan tak diperhatikan	$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

Persamaan Sterling: $n! = \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}$

Perintah (Fungsi) MSExcel

- FACT(*n*)
  - menghitung faktorial, *n*!
  - *n* bilangan positif (bilangan cacah)
- PERMUT(*n*,*r*)
  - menghitung permutasi,
  - *n* dan *r* integer, $n \geq r$
- COMBIN(*n*,*r*)
  - menghitung kombinasi,
  - *n* dan *r* integer, $n \geq r$

Distribusi Binomial

- Ilustrasi
  - Peluang sukses (S) dalam suatu eksperimen adalah p → prob(S) = p
  - Peluang gagal (G) adalah $q = 1 – p$ → prob(G) = q
  - 1x eksperimen:
    - peluang sukses p
    - peluang gagal q
  - 2x eksperimen:
    - peluang sukses kemudian sukses (S,S): pp
    - peluang sukses kemudian gagal (S,G): pq
    - peluang gagal kemudian sukses (G,S): qp
    - peluang gagal kemudian gagal (G,G): qq

Sukses-Gagal dalam 2× Eksperimen

Jumlah sukses	Cara sukses	Jumlah cara sukses	Probabilitas	
2	SS	1	pp	$1p^2q^0$
1	SG atau GS	2	$pq + qp$	$2p^1q^1$
0	GG	1	qq	$1p^0q^2$

Sukses-Gagal dalam 3× Eksperimen

Jumlah sukses	Cara sukses	Jumlah cara sukses	Probabilitas	
3	SSS	1	1 ppp	1 p^3q^0
2	SSG, SGS, GSS	3	3 ppq	3 p^2q^1
1	SGG, GSG, GGS	3	3 pqq	3 p^1q^2
0	GGG	1	1 qqq	1 p^0q^3

Sukses-Gagal dalam 3× atau 5× Eksperimen

- 3x eksperimen:
  - peluang sukses pada eksperimen ke-3: qqp
  - peluang sukses di salah satu eksperimen: pqq + qpq + qqp
- 5x eksperimen:
  - peluang sukses 2x: ppqqq + pqpqq + ... + qqqpp

$$\binom{5}{2} p^2 q^3 = 10 p^2 q^3$$

Distribusi Binomial

- Jika
  - peluang sukses p dan peluang gagal $q = 1 - p$
  - probabilitas sukses p tidak berubah apapun hasil eksperimen yang lain
- Maka
  - peluang mendapatkan x kali sukses dari n kali eksperimen adalah

$$f_x(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

koefisien binomial

Distribusi Binomial

- Contoh #1
  - Setiap tahun dalam 5 tahun dilakukan pemilihan acak untuk menetapkan alokasi dana kepada 1 dari 4 kegiatan (A,B,C,D).
  - Setiap kali dilakukan pemilihan, masing-masing kegiatan memiliki peluang yang sama untuk terpilih (mendapatkan dana).
  - Berapa persen peluang kegiatan A mendapatkan dana 3x?
  - Berapa persen peluang kegiatan A mendapatkan dana 5x, 4x, 3x, 2x, 1x, 0x?

Distribusi Binomial

- Setiap kali pemilihan
  - prob(As) = probabilitas kegiatan A terpilih
    prob(As) = ¼ = 0.25 = *p*
  - prob(Ag) = probabilitas kegiatan A tak terpilih
    prob(Ag) = 1 – *p* = 0.75 = *q*
- Dalam 5 kali pemilihan
  - peluang terpilih (sukses) 3 kali adalah

$$f_x(x; n, p) = f_x(3; 5, 0.25) = \binom{5}{3} 0.25^3 0.75^2 = 0.088$$

Distribusi Binomial

koefisien binomial

Dalam 5 kali pemilihan (n = 5)

jumlah sukses	jumlah cara sukses	peluang sukses
0	1	0.237
1	5	0.396
2	10	0.264
3	10	0.088
4	5	0.015
5	1	0.001
	∑ =	**1.000**

Distribusi Binomial

- Contoh #2
  - Suatu PDAM menemukan fakta bahwa risiko (probabilitas) terjadi problem pasokan air macet pada suatu hari adalah 7%.
  - Dengan pendekatan distribusi binomial, hitunglah:
    - risiko terjadi 2 hari macet dalam satu bulan (30 hari)
    - risiko terjadi paling tidak terjadi 2 hari macet dalam satu bulan (30 hari)
    - peluang pasokan air lancar sepanjang satu bulan alias tidak pernah macet selama 30 hari

Terima kasih