Universitas Gadjah Mada
Fakultas Teknik
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan
Prodi Magister Teknik Sipil

Statistika Teknik

Distribusi Normal

Distribusi Binomial

- Ingat contoh pemilihan 1 kegiatan (Kegiatan A) dari 4 kegiatan untuk didanai

Distribusi Binomial → Histogram Distribusi Probabilitas Sukses

Distribusi Binomial

- Ilustrasi contoh pemilihan kegiatan
  - Setiap tahun dalam 5 tahun dilakukan pemilihan acak untuk menetapkan alokasi dana kepada 1 dari 4 kegiatan (A,B,C,D).
  - Setiap kali dilakukan pemilihan, masing-masing kegiatan memiliki peluang yang sama untuk terpilih (mendapatkan dana).
  - Berapa persen peluang kegiatan A mendapatkan dana 5×, 4×, 3×, 2×, 1×, 0×?

Distribusi Binomial

- Setiap kali pemilihan
  - prob(As) = probabilitas kegiatan A terpilih
    prob(As) = ¼ = 0.25 = p
  - prob(Ag) = probabilitas kegiatan A tak terpilih
    prob(Ag) = 1 – p = 0.75 = q
- Dalam 5 kali pemilihan
  - peluang terpilih (sukses) 3 kali adalah

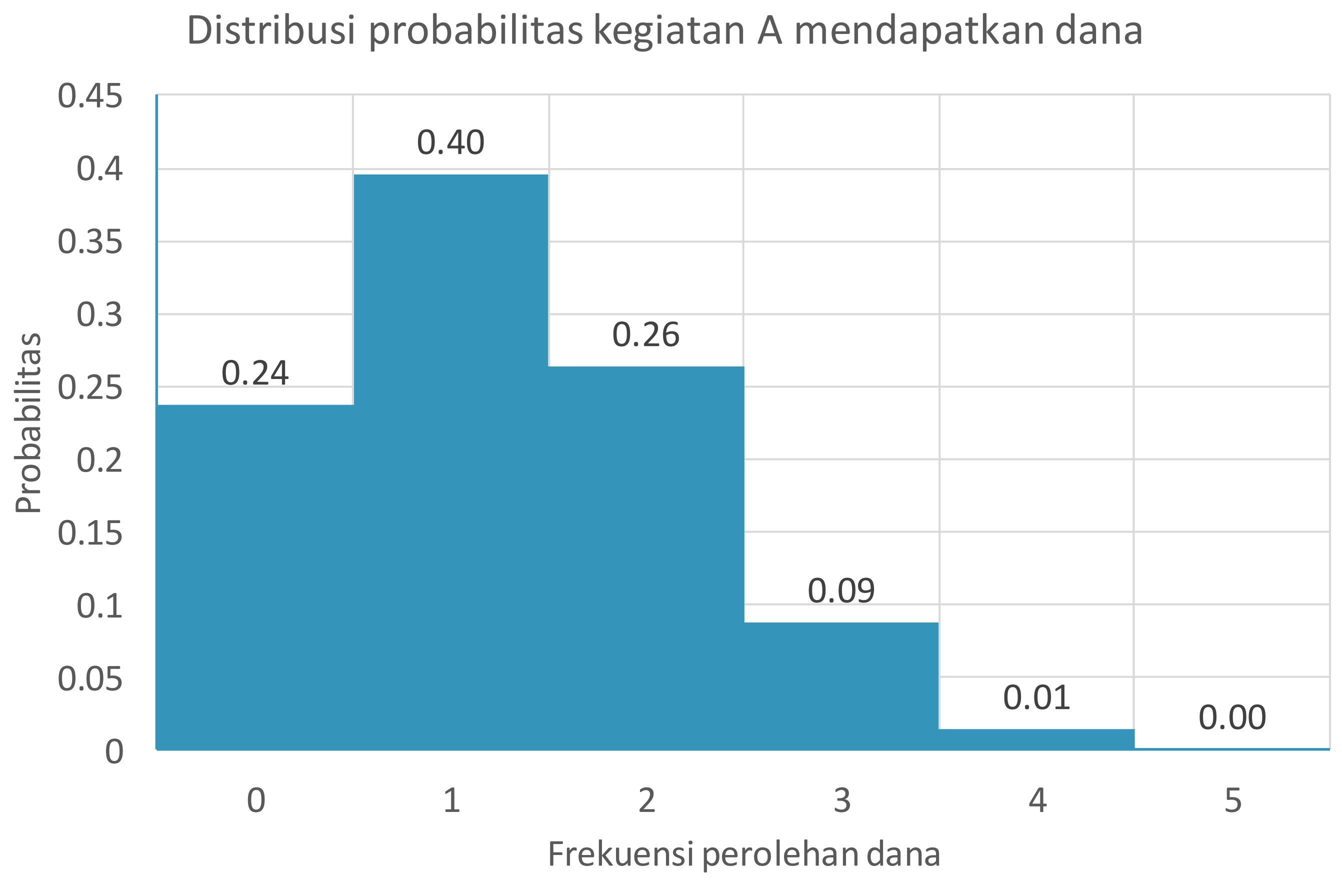
$$f_x(x; n, p) = f_x(3; 5, 0.25) = \binom{5}{3} 0.25^3 0.75^2 = 0.088$$

Distribusi Binomial

Koefisien binomial

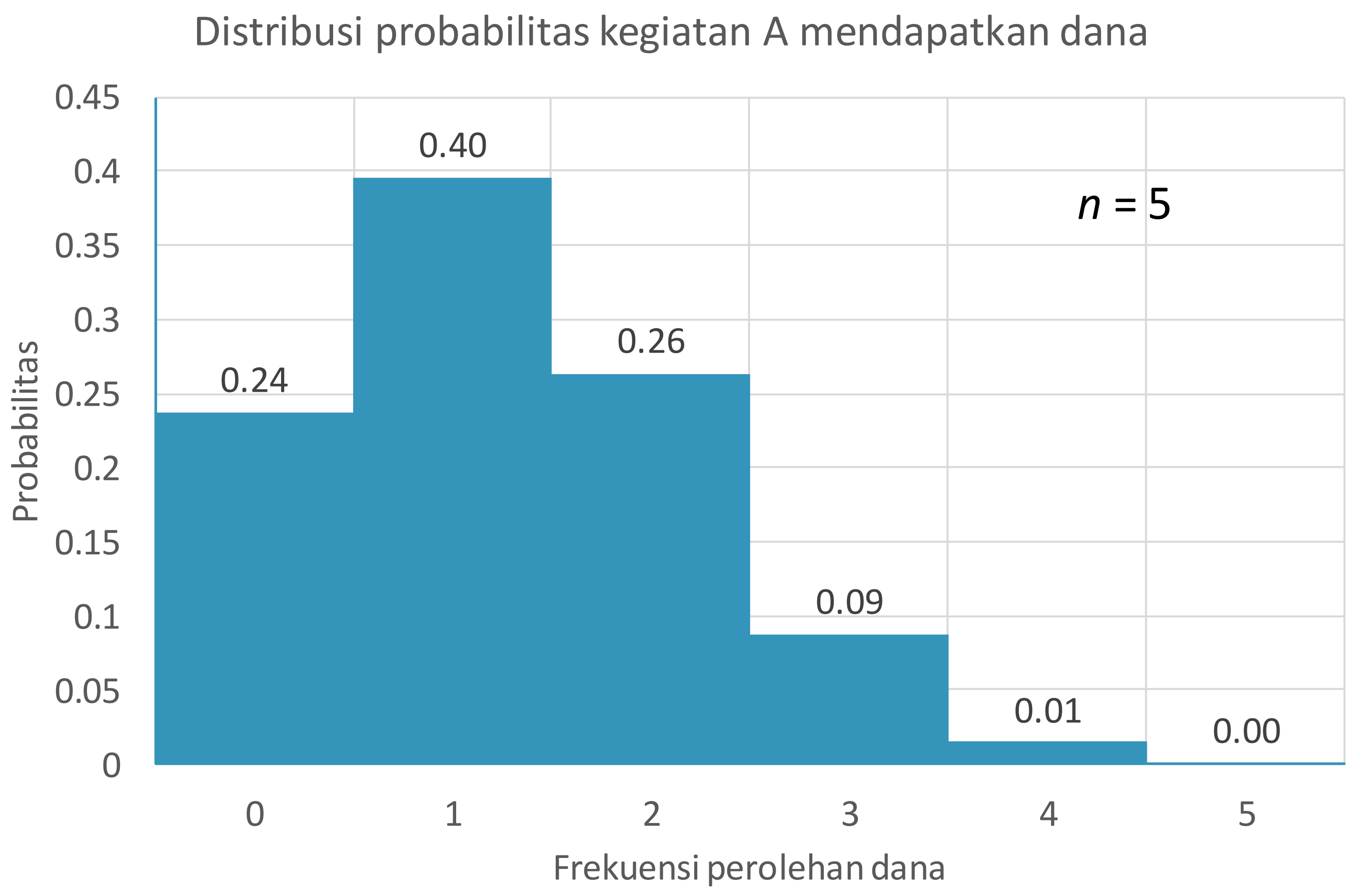
Dalam 5 kali pemilihan, n = 5

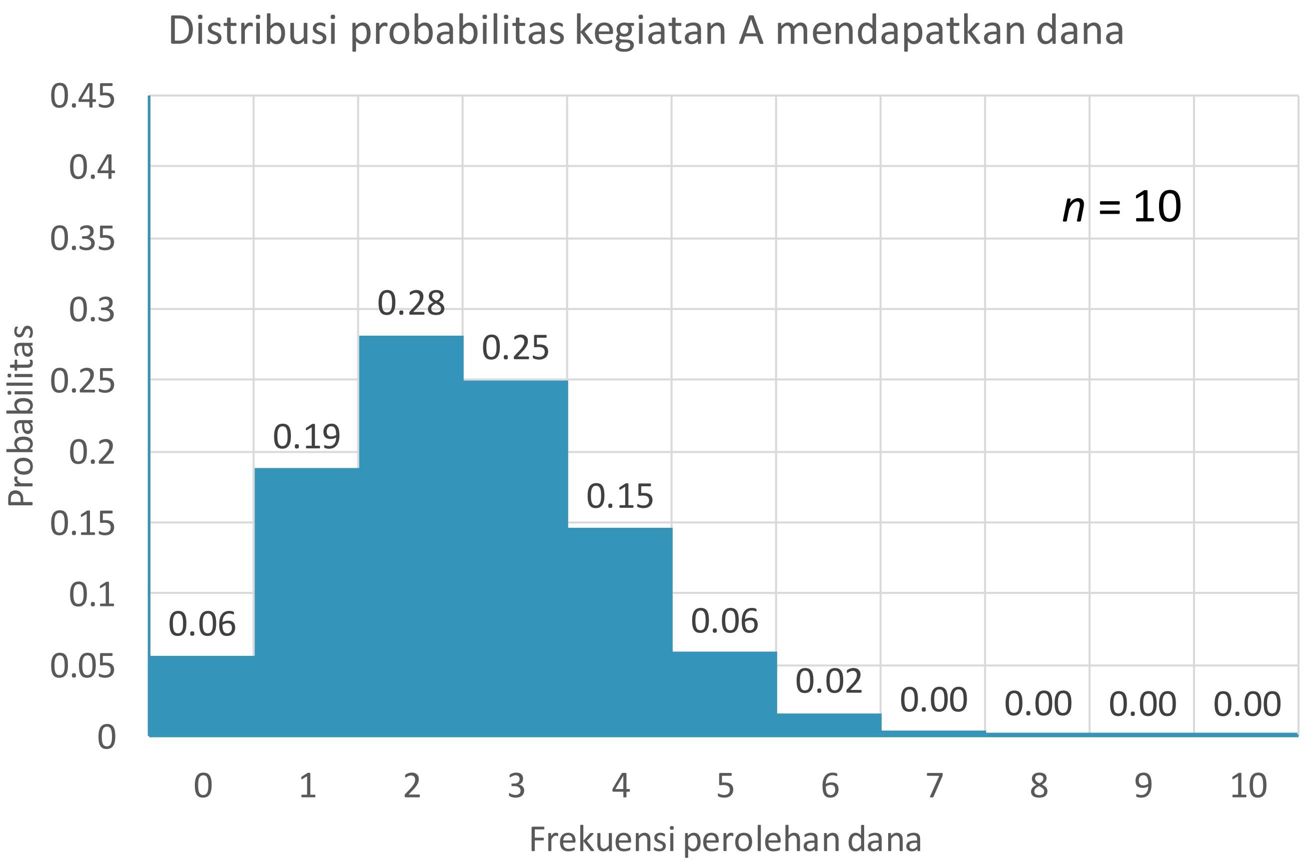
Frekuensi sukses	Jumlah cara sukses	Peluang perolehan sukses
0	1	0.237
1	5	0.396
2	10	0.264
3	10	0.088
4	5	0.015
5	1	0.001
	Σ =	**1.000**

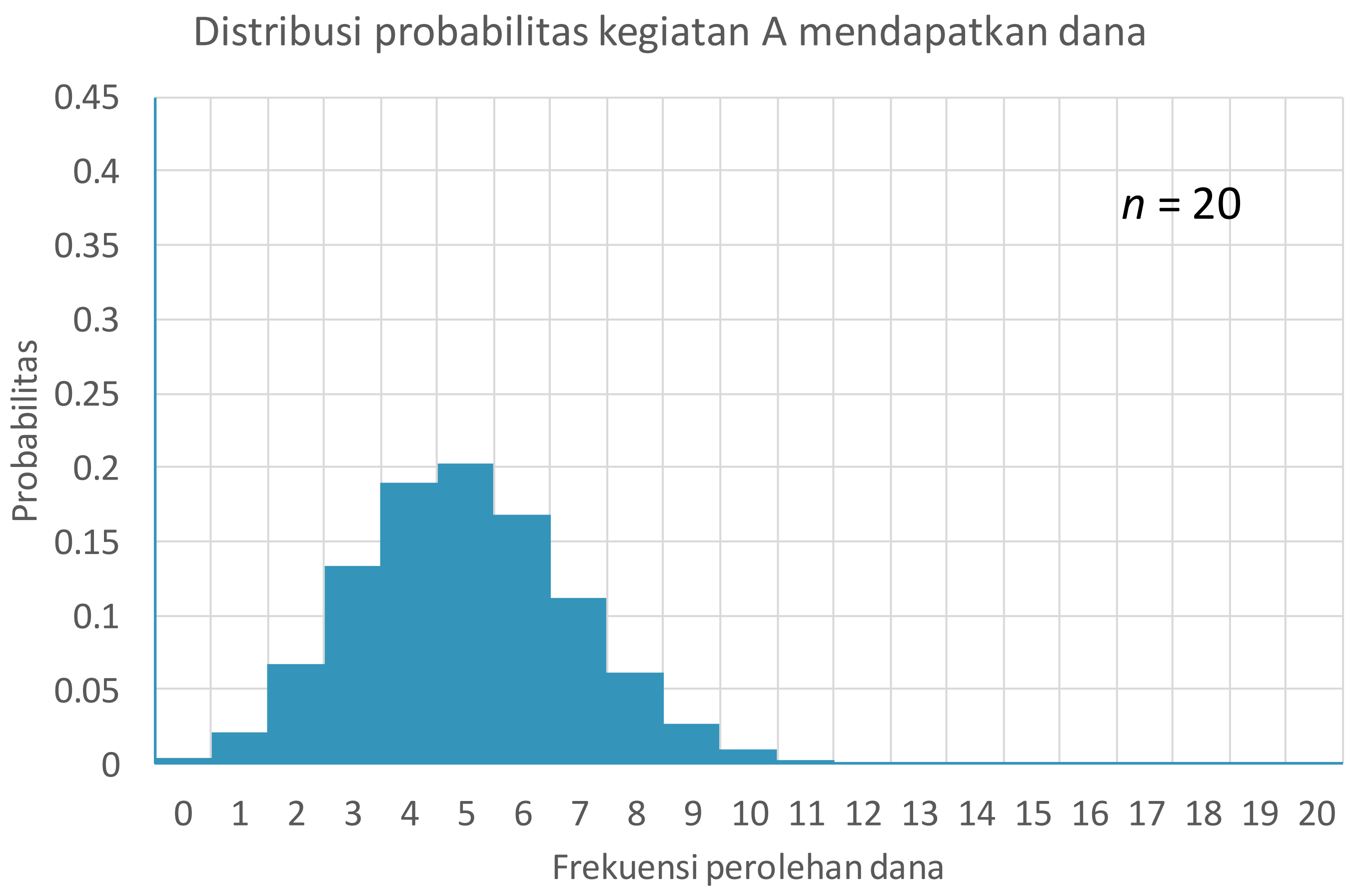

Distribusi probabilitas kegiatan A mendapatkan dana
Probabilitas
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0.24
0.40
0.26
0.09
0.01
0.00
0
1
2
3
4
5
Frekuensi perolehan dana

Distribusi Binomial

- Apabila pemilihan dilakukan untuk waktu yang lebih panjang
  - 10 tahun
  - 20 tahun
  - *n* tahun
    - diperoleh $n + 1$ kemungkinan hasil
    - Kegiatan A dapat memperoleh dana sejumlah
      n kali, $n - 1$ kali, ... 0 kali


Distribusi probabilitas kegiatan A mendapatkan dana
Probabilitas
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0.24
0.40
0.26
0.09
0.01
0.00
n = 5
0
1
2
3
4
5
Frekuensi perolehan dana

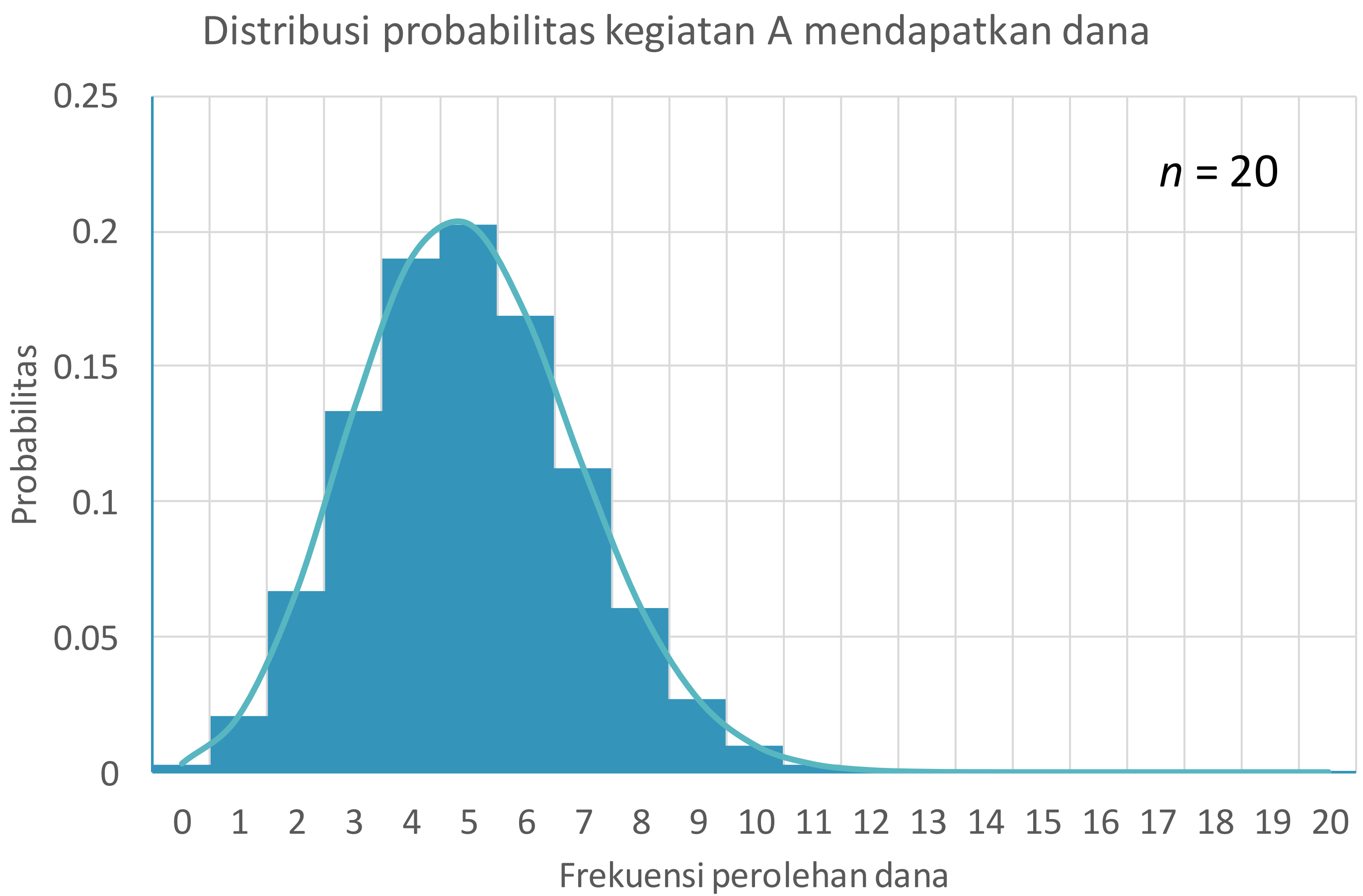

Distribusi probabilitas kegiatan A mendapatkan dana
Probabilitas
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0.06
0.19
0.28
0.25
0.15
0.06
0.02
0.00
0.00
0.00
0.00
n = 10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Frekuensi perolehan dana


Distribusi probabilitas kegiatan A mendapatkan dana
n = 20
Probabilitas
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Frekuensi perolehan dana

Distribusi Binomial vs Kurva Normal

- Apabila pemilihan (eksperimen) dilakukan sejumlah *n* kali dan *n* >>
  - histogram distribusi probabilitas sukses (Kegiatan A memperoleh dana) memiliki interval kecil
  - garis yang melewati puncak-puncak histogram → kurva mulus berbentuk seperti lonceng

Kurva Normal


Distribusi probabilitas kegiatan A mendapatkan dana
n = 20
Probabilitas
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Frekuensi perolehan dana

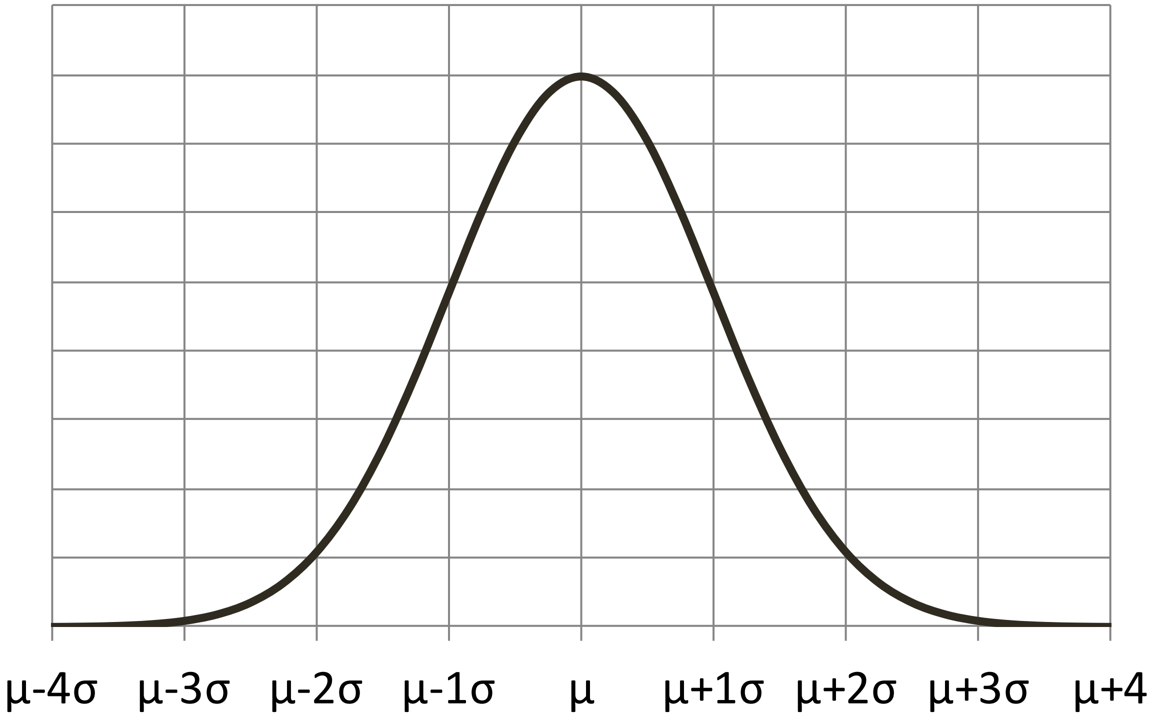
Kurva Normal, Distribusi Normal

- Kurva Normal
  - berbentuk seperti lonceng dengan karakteristik tertentu
  - tidak setiap kurva berbentuk seperti lonceng adalah kurva normal
- Kurva Normal menggambarkan suatu distribusi yang disebut Distribusi Normal
- Permasalahan distribusi binomial dapat diselesaikan dengan pendekatan distribusi normal
- Lebih mudah dilakukan karena karakteristik distribusi normal telah diketahui (didefinisikan)
  - tabel distribusi normal
  - perintah dalam MS Excel

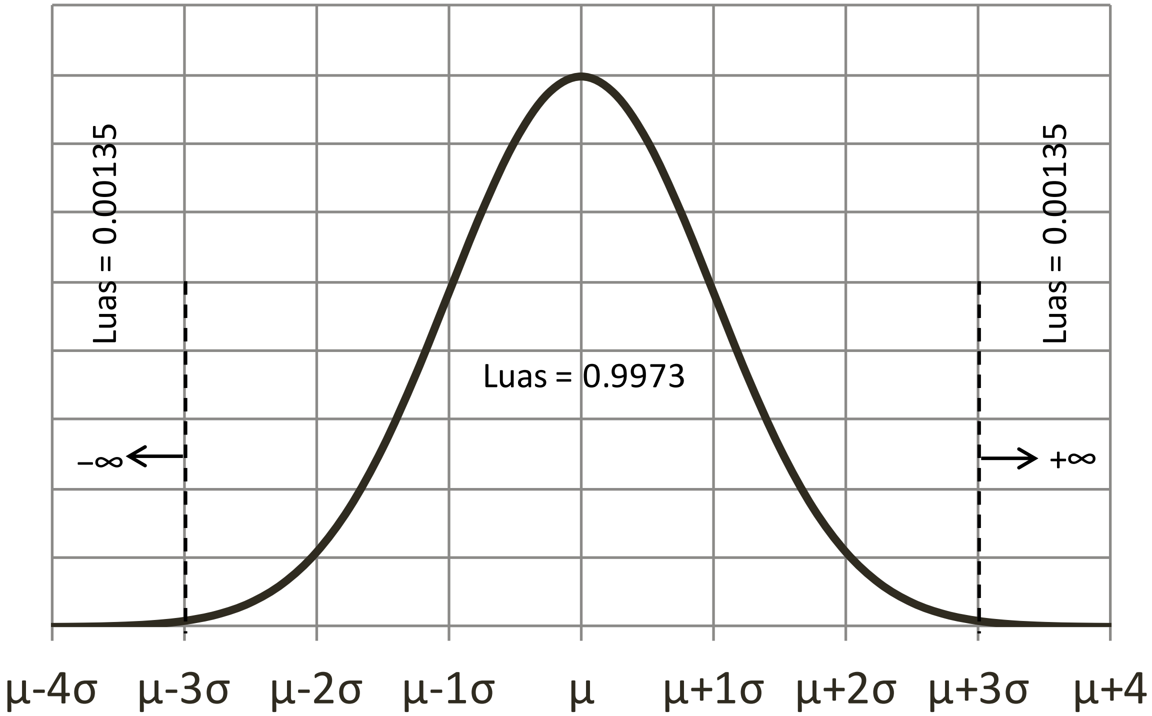
Distribusi Normal

- Sifat-sifat distribusi normal
  - simetris terhadap nilai rata-rata (*mean*)
  - *score* mengumpul di sekitar nilai rata-rata
  - kisaran *score* tak terbatas, namun sangat sedikit yang berada di luar kisaran 3 kali simpangan baku dari nilai rata-rata

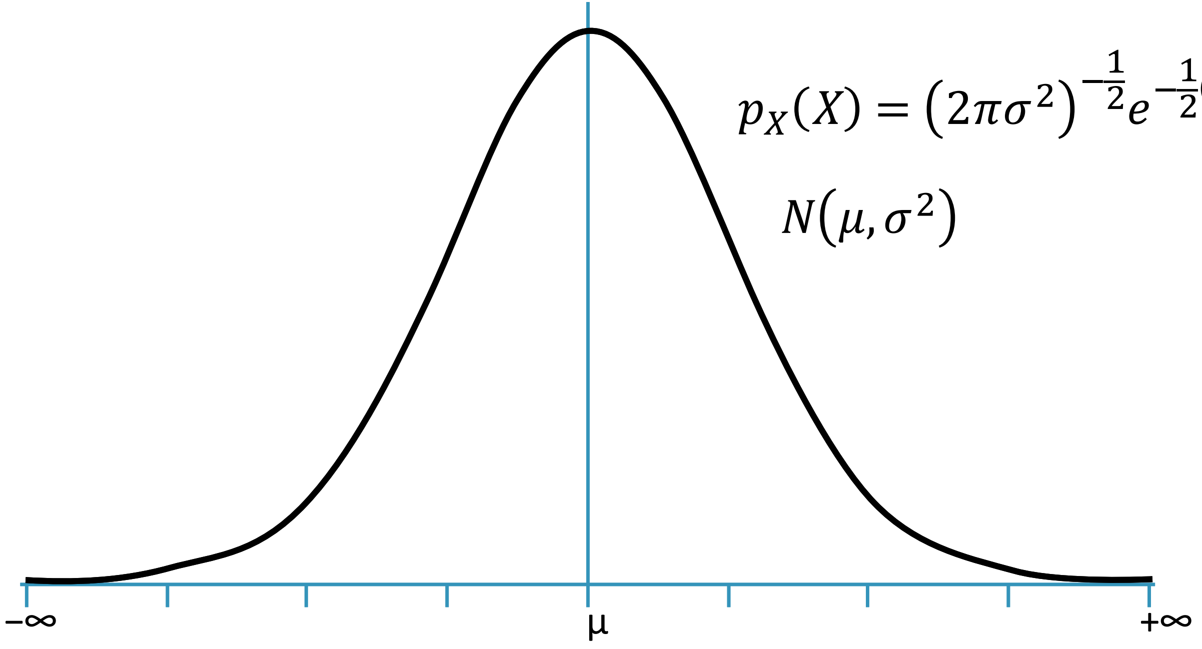
Distribusi Normal



Distribusi Normal



Distribusi Normal



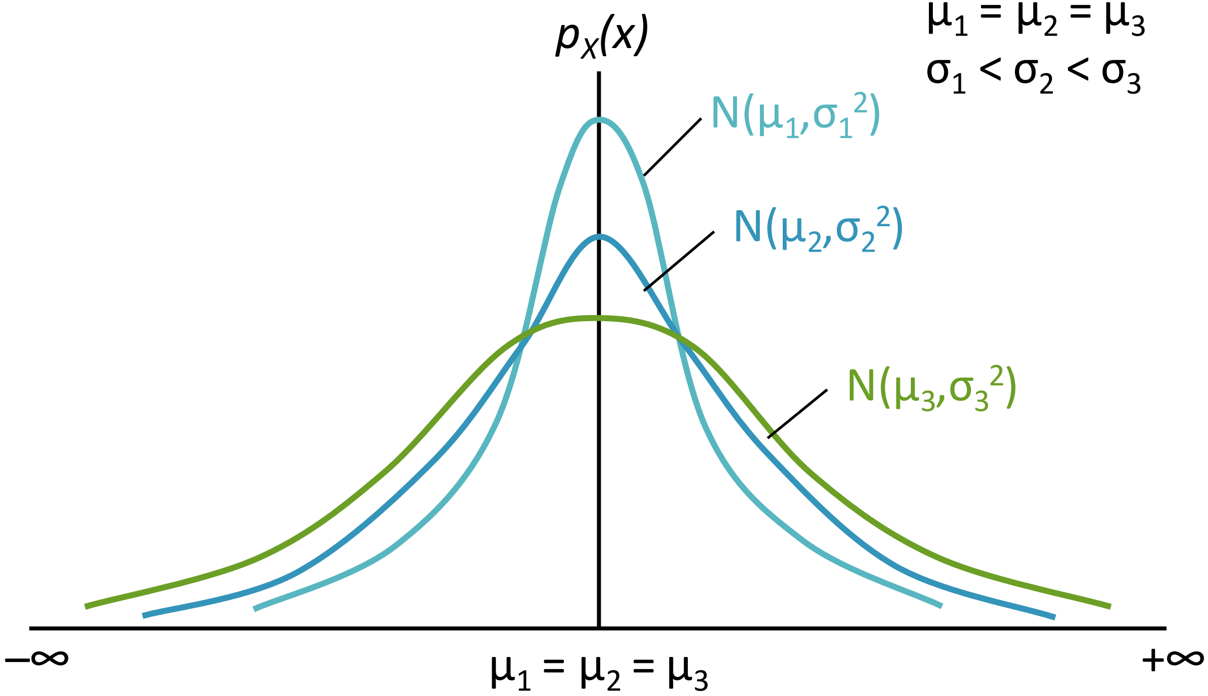
$$p_X(X) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)/\sigma^2}$$

$$N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

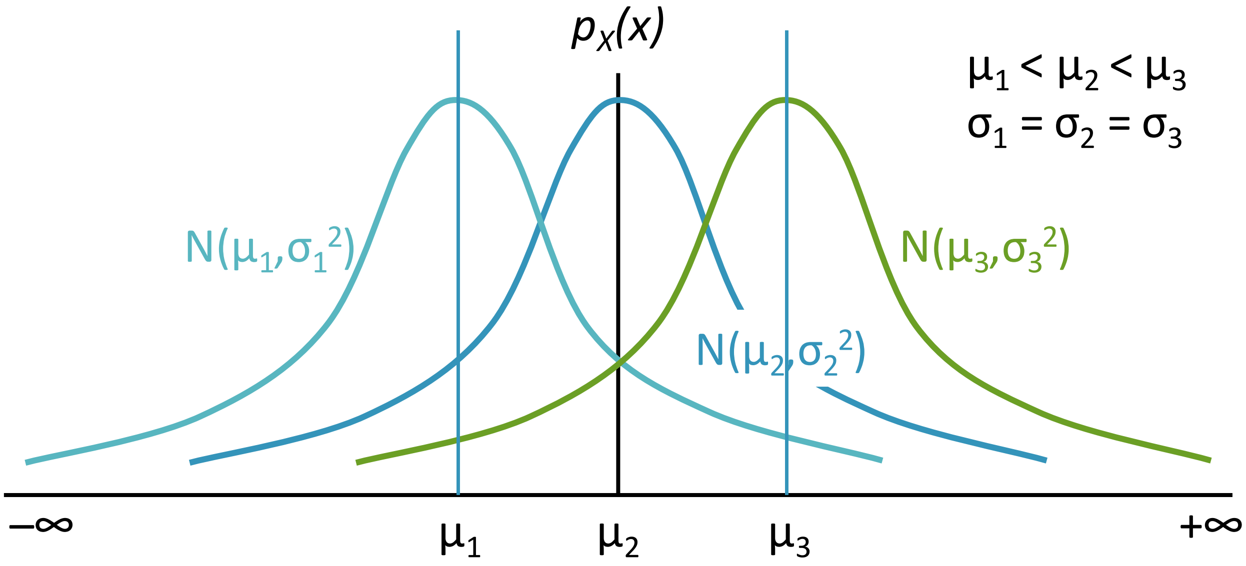
pdf – *probability density function*

pdf

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$



pdf

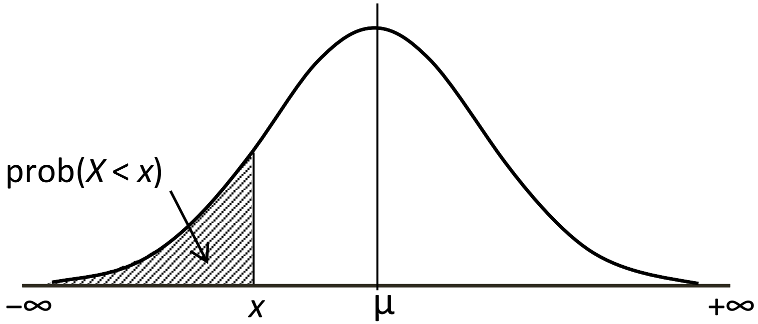

$p_X(x)$
$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$
$N(\mu_1,\sigma_1^2)$
$N(\mu_2,\sigma_2^2)$
$N(\mu_3,\sigma_3^2)$
$-\infty$
μ_1
μ_2
μ_3
$+\infty$

Distribusi Normal

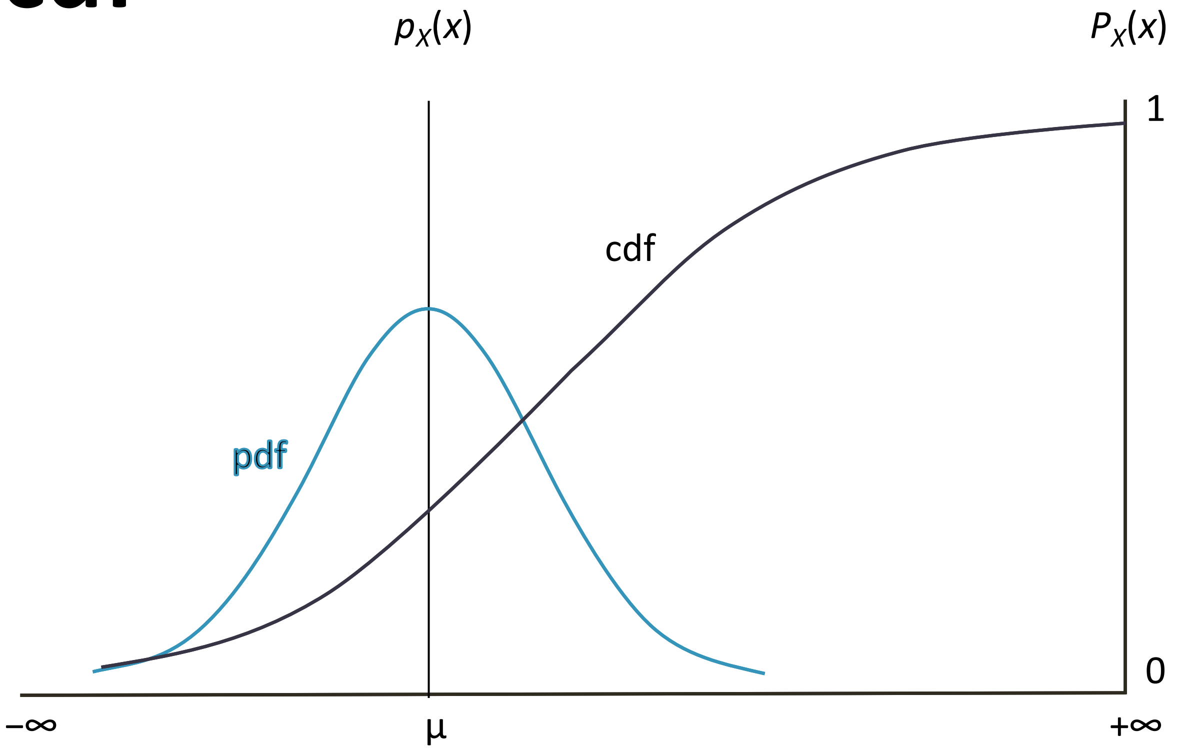
- Jika X berdistribusi normal, $N(\mu,\sigma^2)$, maka probabilitas X bernilai kurang daripada x ($X < x$) dapat dituliskan sbb:

$$\mathrm{prob}(X < x) = P_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(x)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} e^{-1/2(t-\mu)/\sigma^2}\mathrm{d}t$$

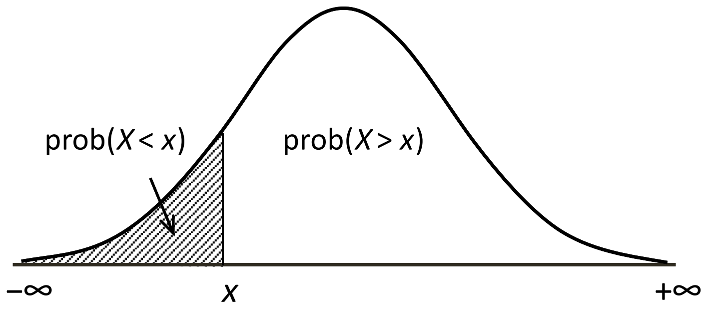
luas di bawah kurva *probability density function*, pdf → *cumulative distribution function*, cdf



pdf-cdf



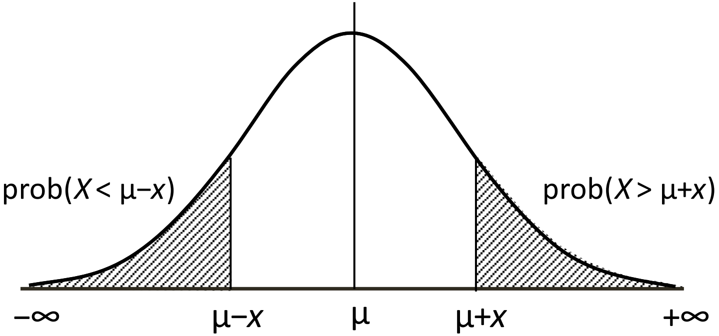
Normal Distribution



- Luas di bawah kurva pdf
  - adalah probabilitas event
  - adalah percentile rank
- $\text{prob}(X < x) = \text{prob}(-\infty < X < x)$
  $= \text{luas di bawah kurva pdf dari } -\infty \text{ s.d. } x$
- $\text{prob}(-\infty < X < +\infty) = 1$
- $\text{prob}(X > x) = \text{prob}(x < X < +\infty)$
  $= \text{luas di bawah kurva pdf dari } x \text{ s.d. } +\infty$
  $= 1 - \text{prob}(X < x)$

Normal Distribution

- Probabilitas
  - prob($X = x$) = luas di bawah kurva pdf dari x s.d. x
    = 0
  - prob($X \leq x$) = prob($X < x$)
    prob($X \geq x$) = prob($X > x$)
    prob($x_a \leq X \leq x_b$) = prob($x_a < X < x_b$)
  - prob($X < \mu$) = 0.5
    prob($X > \mu$) = 0.5
    prob($\mu - x < X < \mu$) = prob($\mu < X < \mu + x$)
    prob($\mu < X < \mu - x$) = prob($X > \mu + x$)



Distribusi Normal Baku

- Distribusi normal lazim dinyatakan dalam distribusi normal baku
  - *z score*

$$z_x = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

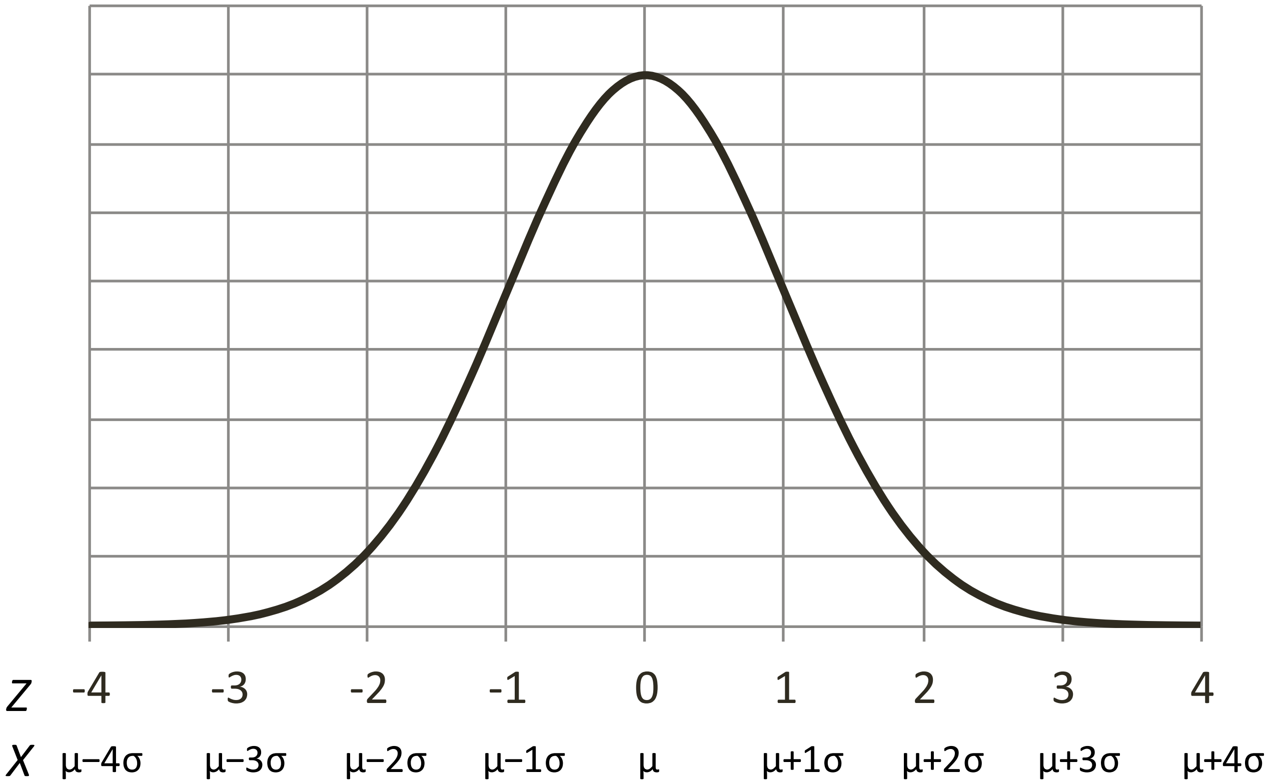
Z berdistribusi normal dengan μ = 0 dan σ^2 = 1, *N*(0,1)
→ distribusi normal baku

  - pdf dancdf

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < +\infty$$

$$\mathrm{prob}(Z < z) = P_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} p_Z(z)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$$

Distribusi Normal Baku



Distribusi Normal Baku

- Tabel z *vs* ordinat kurva normal baku
  - *z vs* ordinat pdf (*probability density function*)
- Tabel *z vs* luas di bawah kurva
  - *z vs* cdf (*cumulative distribution function*)
  - luas kurva dari 0 s.d. z_x
  - luas kurva dari –∞ s.d. z_x
- Tabel distribusi normal baku
  - Tabel distribusi normal baku versi 1
  - Tabel distribusi normal baku versi 2

Distribusi Normal Baku

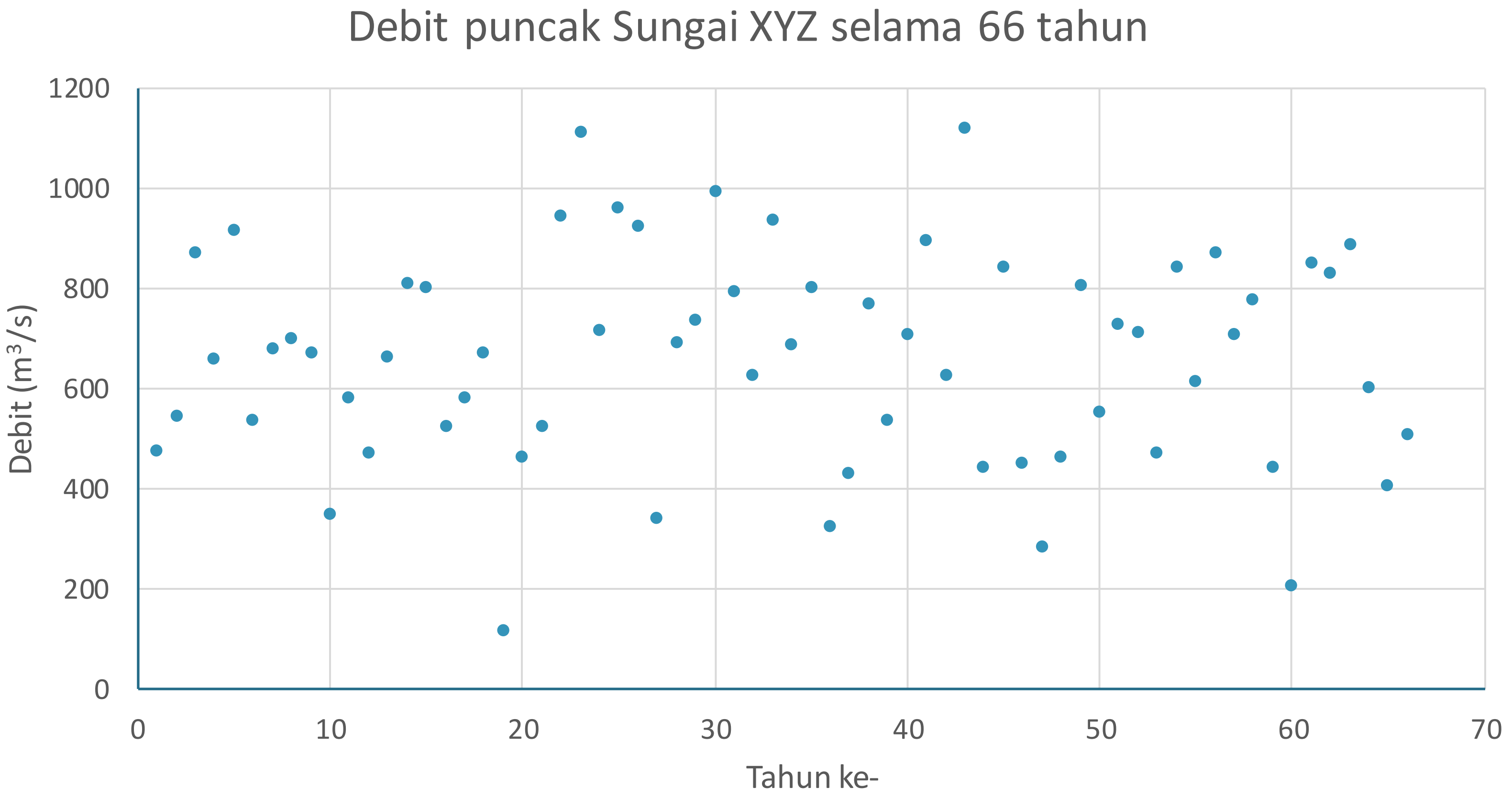
- Kita dapat membuat sendiri tabel-tabel ini dengan memakai program aplikasi atau program aplikasi *spreadsheet.*
  - Gunakan fungsi-fungsi yang ada dalam MSExcel.
    - =NORM.DIST(…)
    - =NORM.S.DIST(…)
    - =NORM.INV(…)
    - =NORM.S.INV(…)
  - Silakan membuat sendiri tabel distribusi normal baku dengan menggunakan MSExcel.

Distribusi Normal

Kurva Normal Data Pengamatan

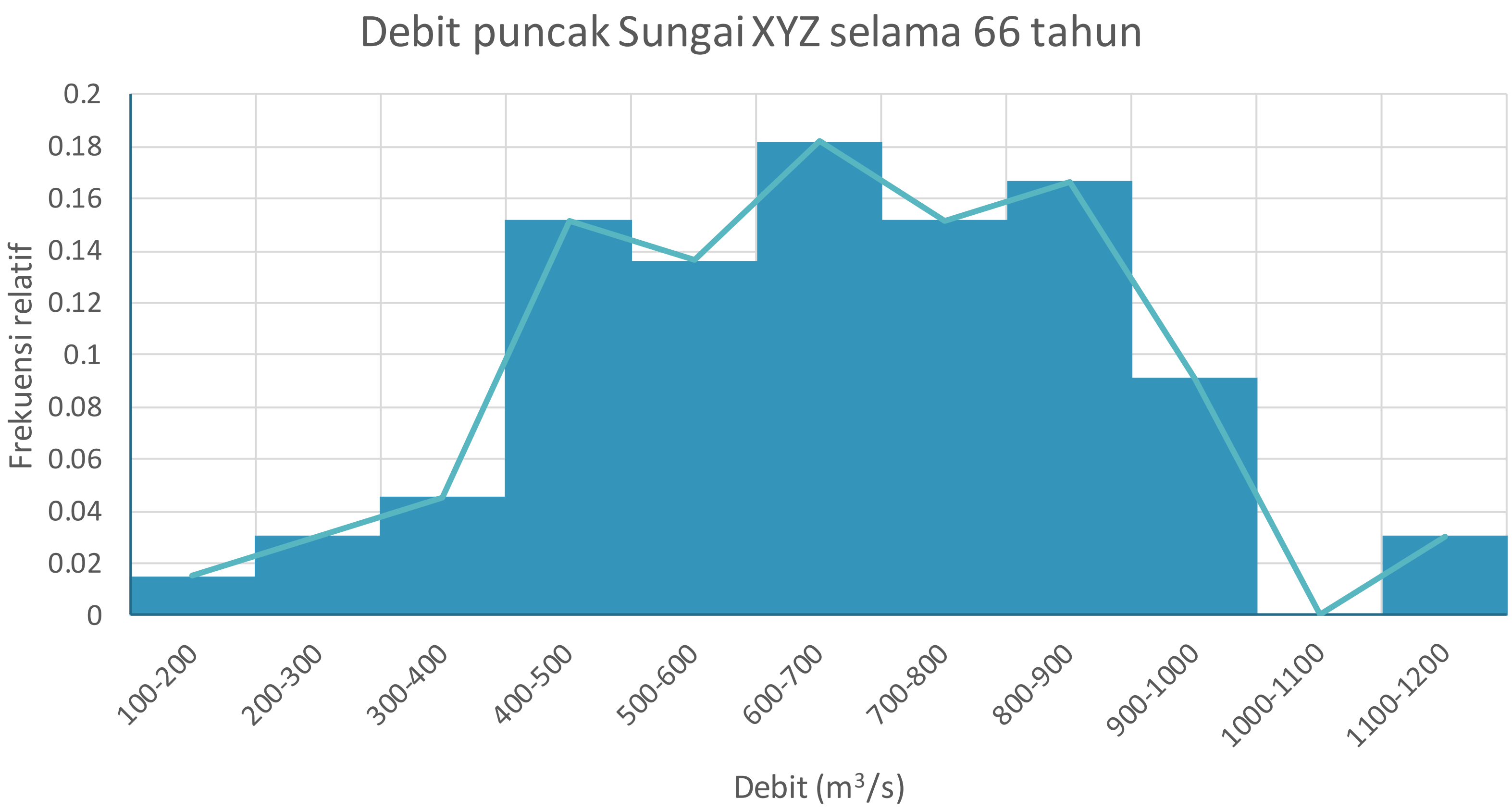
Debit Puncak Tahunan Sungai XYZ

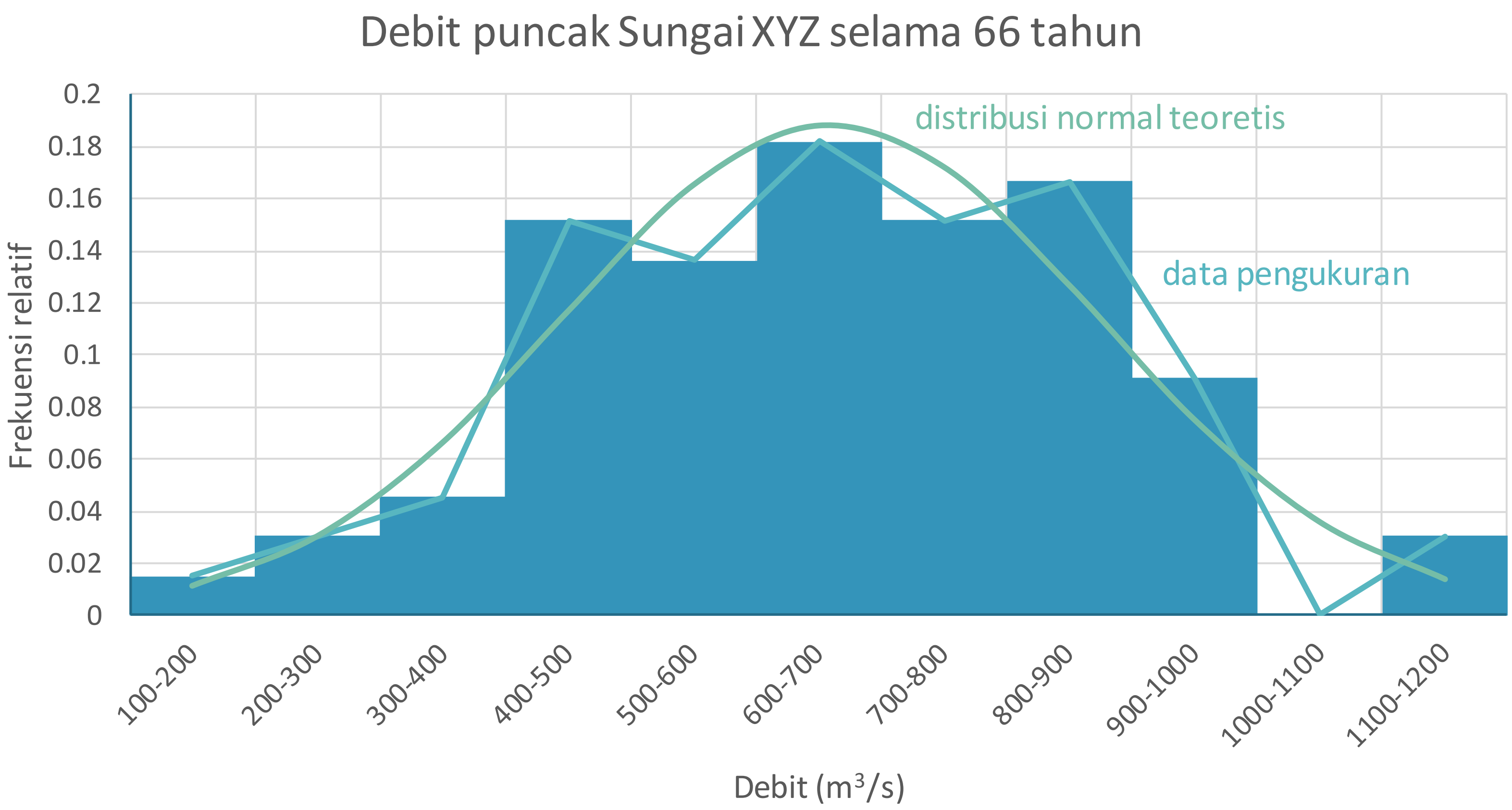
Year	Discharge (m^3/s)	Year	Discharge (m^3/s)	Year	Discharge (m^3/s)
1	473	23	1110	45	843
2	544	24	717	46	450
3	872	25	961	47	284
4	657	26	925	48	460
5	915	27	341	49	804
6	535	28	690	50	550
7	678	29	734	51	729
8	700	30	991	52	712
9	669	31	792	53	468
10	347	32	626	54	841
11	580	33	937	55	613
12	470	34	687	56	871
13	663	35	801	57	705
14	809	36	323	58	777
15	800	37	431	59	442
16	523	38	770	60	206
17	580	39	536	61	850
18	672	40	708	62	829
19	115	41	894	63	887
20	461	42	626	64	602
21	524	43	1120	65	403
22	943	44	440	66	505


Debit puncak Sungai XYZ selama 66 tahun
Debit (m3/s)
Tahun ke-
0
200
400
600
800
1000
1200
0
10
20
30
40
50
60
70

Debit Puncak Tahunan Sungai XYZ

Debit (m^3/s)				Frekuensi	Frekuensi relatif
100	–	200	150	1	0.02
200	–	300	250	2	0.03
300	–	400	350	3	0.05
400	–	500	450	10	0.15
500	–	600	550	9	0.14
600	–	700	650	12	0.18
700	–	800	750	10	0.15
800	–	900	850	11	0.17
900	–	1000	950	6	0.09
1000	–	1100	1050	0	0.00
1100	–	1200	1150	2	0.03
				66	1.00


Debit puncak Sungai XYZ selama 66 tahun
Frekuensi relatif
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
100-200
200-300
300-400
400-500
500-600
600-700
700-800
800-900
900-1000
1000-1100
1100-1200
Debit (m3/s)



Debit puncak Sungai XYZ selama 66 tahun
distribusi normal teoretis
data pengukuran
Frekuensi relatif
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
100-200
200-300
300-400
400-500
500-600
600-700
700-800
800-900
900-1000
1000-1100
1100-1200
Debit (m3/s)

Debit Puncak Tahunan Sungai XYZ

Debit (m^3/s)				$F_Q(q_{upper})$	$F_Q(q_{lower})$	Frek. rel.
100	–	200	150	0.0142	0.0038	0.0104
200	–	300	250	0.0432	0.0142	0.0290
300	–	400	350	0.1078	0.0432	0.0646
400	–	500	450	0.2231	0.1078	0.1152
500	–	600	550	0.3875	0.2231	0.1645
600	–	700	650	0.5755	0.3875	0.1880
700	–	800	750	0.7475	0.5755	0.1720
800	–	900	850	0.8735	0.7475	0.1259
900	–	1000	950	0.9473	0.8735	0.0738
1000	–	1100	1050	0.9819	0.9473	0.0346
1100	–	1200	1150	0.9949	0.9819	0.0130
						0.9911

Data Pengukuran *vs* Distribusi Teoretis

- Ekspektasi frekuensi relatif (menurut distribusi normal)
  - kelas ke-2

$$\bar{Q} = 660 \ \mathrm{m^3/s}$$
$$s_Q = 210 \ \mathrm{m^3/s}$$

$$f_Q(q = 250) = \int_{200}^{300} \left(2\pi {s_Q}^2\right)^{-1/2} e^{-1/2(q-\bar{Q})^2/{s_Q}^2} \mathrm{d}q$$

$$= \int_{200}^{300} \left(2\pi 210^2\right)^{-1/2} e^{-1/2(q-660)^2/210^2} \mathrm{d}q$$

$$= F_Q(300) - F_Q(200) = F_Z\left(\frac{300-660}{210}\right) - F_Q\left(\frac{200-660}{210}\right)$$

$$= F_Z(-1.7143) - F_Z(-2.1905) = 0.0432 - 0.0142 = 0.0290$$

Data Pengukuran *vs* Distribusi Teoretis

- Cara lain untuk menemukan frekuensi relatif
  - kelas ke-2

$$\left.\begin{aligned} f_Q(q_i) &= \Delta q_i \, p_Q(q_i) \\ p_Q(q_i) &= p_Z(z_i) \left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}q}\right| = \frac{p_Z(z_i)}{s_Q} \end{aligned}\right\} \quad f_Q(q_i) = \Delta q_i \frac{p_Z(z_i)}{s_Q}$$

Data Pengukuran *vs* Distribusi Teoretis

- Cara lain untuk menemukan frekuensi relatif
  - kelas ke-2

$$i = 2$$

$$\Delta q_i = 100\ \mathrm{m^3/s}$$

$$q_i = 250\ \mathrm{m^3/s} \Rightarrow z_i = \frac{250 - 660}{210} = -1.95$$

$$p_Z(z_i = -1.95) = 0.0593\ \text{(dari tabel)}$$

$$f_Q(q_i = 250) = 100\left(\frac{0.0593}{210}\right) = 0.028$$

Debit Puncak Tahunan Sungai XYZ

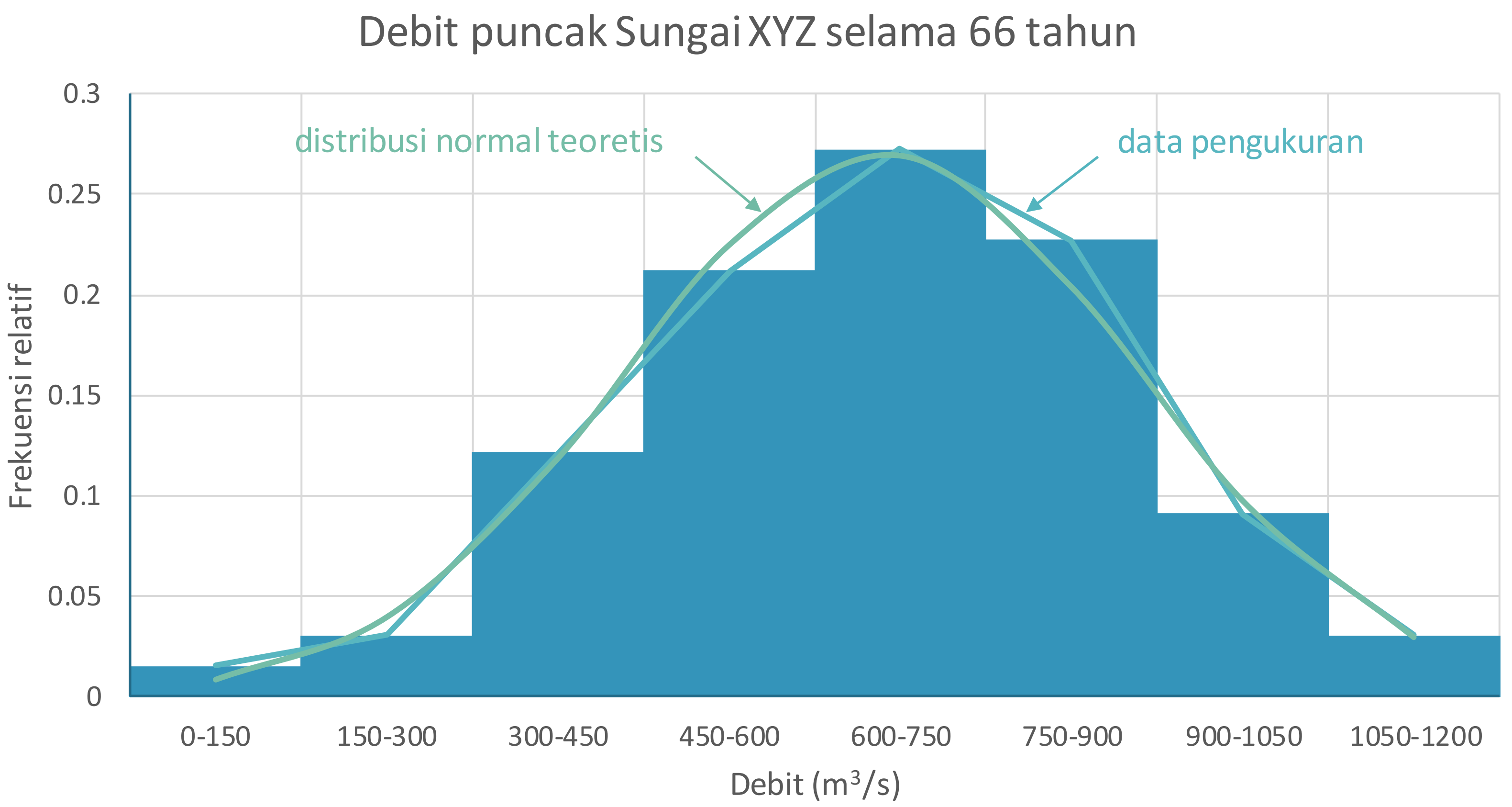
Debit (m^3/s)				$p_Q(q)$	Frek. rel.
100	–	200	150	9.95E-05	0.0100
200	–	300	250	2.82E-04	0.0282
300	–	400	350	6.39E-04	0.0639
400	–	500	450	1.15E-03	0.1152
500	–	600	550	1.66E-03	0.1656
600	–	700	650	1.90E-03	0.1898
700	–	800	750	1.73E-03	0.1733
800	–	900	850	1.26E-03	0.1262
900	–	1000	950	7.32E-04	0.0732
1000	–	1100	1050	3.39E-04	0.0339
1100	–	1200	1150	1.25E-04	0.0125
					0.9917

Debit Puncak Tahunan Sungai XYZ

- Jika lebar rentang kelas 100 m^3/s, maka ada satu kelas yang memiliki frekuensi nol → perlebar rentang kelas menjadi 150 m^3/s.

Debit Puncak Tahunan Sungai XYZ

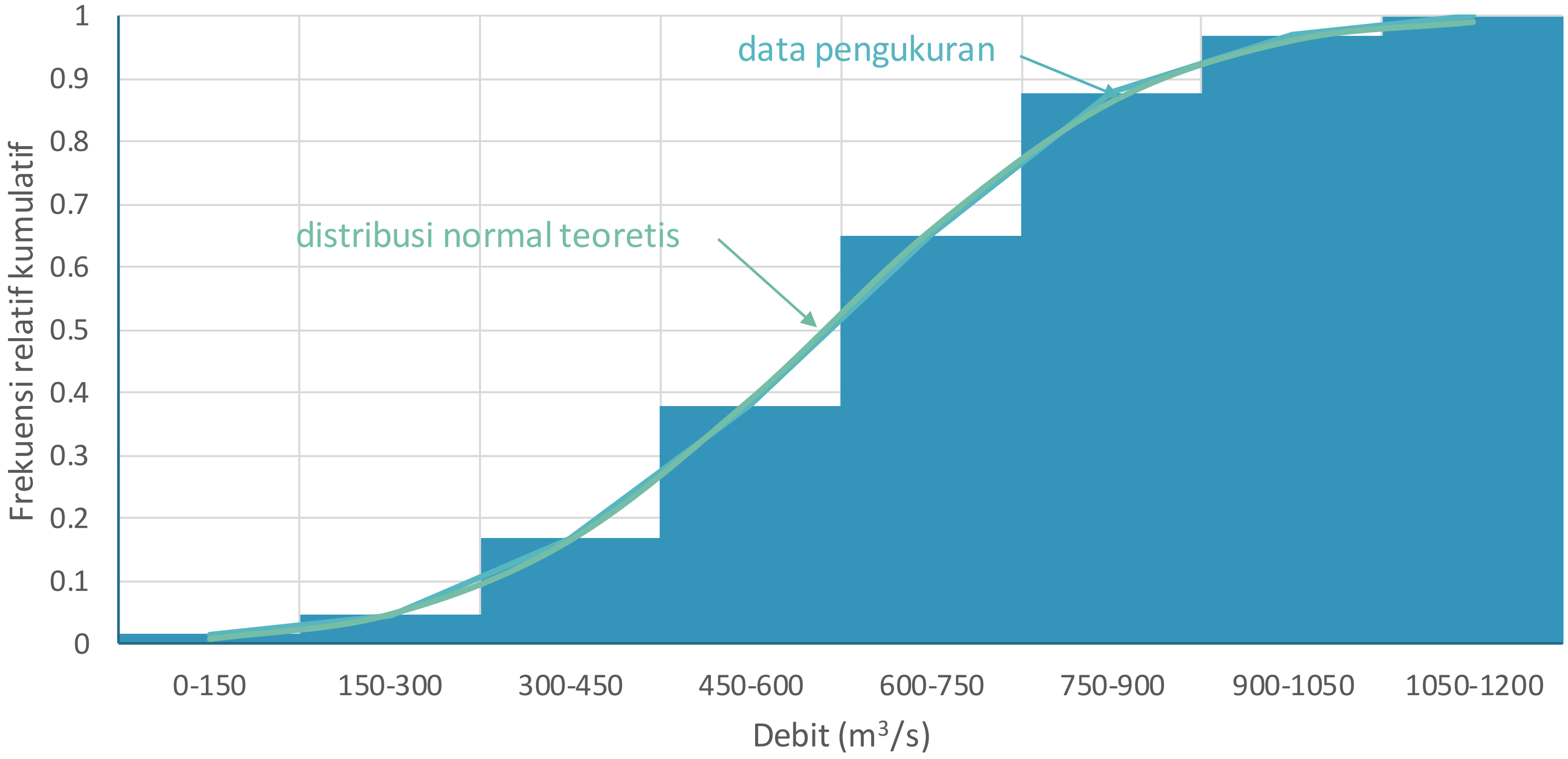
Debit (m^3/s)			Data pengukuran		Distribusi normal	
			Frek.	Frek. rel.	Frek. rel.	Frek.
0	–	150	1	0.02	0.0067	1
150	–	300	2	0.03	0.0357	2
300	–	450	8	0.12	0.1154	8
450	–	600	14	0.21	0.2289	15
600	–	750	18	0.27	0.2783	18
750	–	900	15	0.23	0.2076	14
900	–	1050	6	0.09	0.0949	6
1050	–	1200	2	0.03	0.0266	2
			66	**1.00**		**66**


Debit puncak Sungai XYZ selama 66 tahun
distribusi normal teoretis
data pengukuran
Frekuensi relatif
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0-150
150-300
300-450
450-600
600-750
750-900
900-1050
1050-1200
Debit (m^3/s)

Debit Puncak Tahunan Sungai XYZ

Debit (m^3/s)	Data pengukuran		Distribusi normal	
	Frek. rel.	Frek. rel. kum.	Frek. rel.	Frek. rel. kum.
0 – 150	0.02	0.02	0.0067	0.0067
150 – 300	0.03	0.05	0.0357	0.0424
300 – 450	0.12	0.17	0.1154	0.1578
450 – 600	0.21	0.38	0.2289	0.3867
600 – 750	0.27	0.65	0.2783	0.6650
750 – 900	0.23	0.88	0.2076	0.8726
900 – 1050	0.09	0.97	0.0949	0.9675
1050 – 1200	0.03	1.00	0.0266	0.9941
	1.00		**0.9941**	

Debit puncak Sungai XYZ selama 66 tahun



Terima kasih