



Universitas Gadjah Mada  
Fakultas Teknik  
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan  
Prodi Magister Teknik Sipil

**Statistika Teknik**

# **Rentang Keyakinan**

# Rentang Keyakinan

## ■ Estimasi Parameter

- Distribusi probabilitas memiliki sejumlah parameter.
- Parameter-parameter tsb umumnya tak diketahui.
- Nilai parameter tersebut diperkirakan (di-estimasi-kan) berdasarkan nilai yang diperoleh dari pengolahan data.
- Estimasi
  - Estimasi tunggal (*point estimates*)
  - Rentang keyakinan (*confidence intervals*)

# Rentang Keyakinan

## ■ Estimasi tunggal

- Contoh

- Nilai rata-rata sampel sbg estimasi nilai rata-rata populasi.

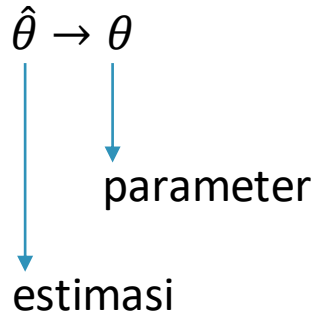
$$\bar{X} \rightarrow \mu$$

- Nilai simpangan baku sampel sbg estimasi nilai simpangan baku populasi.

$$S_X \rightarrow \sigma_X$$

# Rentang Keyakinan

- Estimasi parameter  $\theta$



Dicari suatu interval  $[L, U]$  yang memiliki probabilitas  $(1 - \alpha)$  bahwa interval tsb mengandung  $\theta$

$$\text{prob}(L < \theta < U) = (1 - \alpha)$$

→ Pers (1)

$L$  = batas bawah rentang keyakinan.

$U$  = batas atas rentang keyakinan.

$(1 - \alpha)$  = tingkat keyakinan (*confidence level, confidence coefficient*).

$L$  dan  $U$  = variabel random

# Rentang Keyakinan

## ■ Contoh

- Data debit puncak tahunan Sungai XYZ selama 66 tahun (sampel) menunjukkan bahwa debit rata-rata adalah  $660 \text{ m}^3/\text{s}$ .
  - Kita dapat memperkirakan debit rata-rata Sungai A (populasi) adalah  $660 \text{ m}^3/\text{s}$ .

$$\mu_Q = \bar{Q} = 660 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Kita menyadari bahwa perkiraan tsb dapat salah; bahkan dari sisi pengertian probabilitas, kita tahu bahwa debit rata-rata sama dengan  $660 \text{ m}^3/\text{s}$  adalah hampir tidak mungkin terjadi:

$$\text{prob}(\mu_Q = 660 \text{ m}^3/\text{s}) = 0$$

# Batas Bawah dan Batas Atas Rentang Keyakinan

- Metode Ostle: *method of pivotal quantities*
  - Dicari variabel random  $V$  yang merupakan fungsi parameter  $\theta$  ( $\theta = \text{unknown}$ ), tetapi distribusi  $V$  ini tidak bergantung pada parameter yang tidak diketahui
  - Ditentukan  $v_1$  dan  $v_2$  sedemikian hingga:  
$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha$$

# Batas Bawah dan Batas Atas Rentang Keyakinan

- Metode Ostle: *method of pivotal quantities*

$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha$$

- Persamaan di atas diubah kedalam bentuk  $\text{prob}(L < \theta < U) = 1 - \alpha$
- $L$  dan  $U$  adalah variabel random dan fungsi  $V$ , tetapi bukan fungsi  $\theta$

## Rentang Keyakinan *mean*, $\mu$ (varians $\sigma$ tidak diketahui)

- Mencari interval  $[L, U]$  yang mengandung  $\mu$

$$\text{prob}(L < \theta < U) = 1 - \alpha$$

- Misalkan variabel random  $V$ :

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{S_{\bar{X}}}$$

- $V$  berdistribusi  $t$  dengan  $(n - 1)$  *degrees of freedom*
- $n$  adalah jumlah sampel yang dipakai untuk menghitung nilai rata-rata sampel,  $\bar{X}$



$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} \text{ berdistribusi } t?$$

- Bukti

Distribusi t:  $X = Y \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{U}}$   $v = \text{degrees of freedom}$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s_X^2/n}} = \frac{(\bar{X} - \mu)/\sigma}{\sqrt{s_X^2/\sigma\sqrt{n}}} = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{s_X^2/\sigma^2}} \\ &= \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2/\sigma^2}} = Y \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{U}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow Y = \frac{\bar{X} - \mu}{v/\sqrt{n}}, \quad U = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}, \quad v = n - 1$$



- Pers. (2)

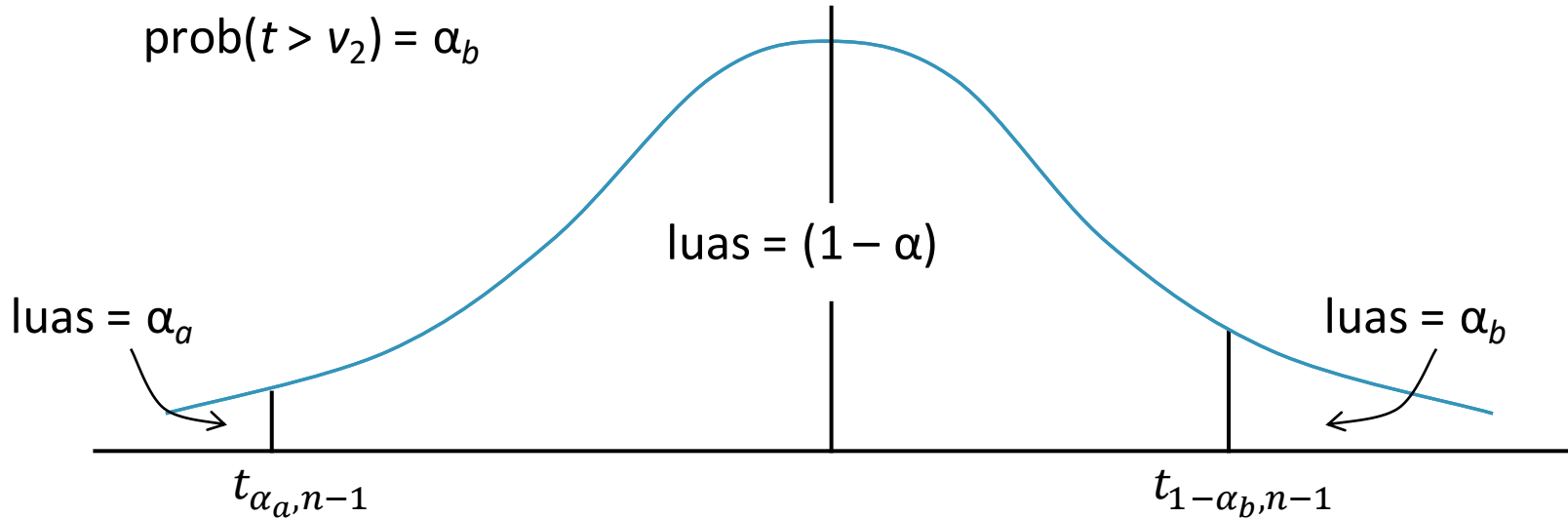
$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha \Rightarrow \text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

$$\alpha_a + \alpha_b = \alpha$$

$$\text{prob}(t < v_1) = \alpha_a$$

dengan  $(n - 1)$  degrees of freedom

$$\text{prob}(t > v_2) = \alpha_b$$



$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(t_{\alpha_a, n-1} < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < t_{1-\alpha_b, n-1}\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(\underbrace{\bar{X} + t_{\alpha_a, n-1} s_{\bar{X}}}_{\ell} < \mu < \bar{X} + \underbrace{t_{1-\alpha_b, n-1} s_{\bar{X}}}_{u}\right) = 1 - \alpha$$

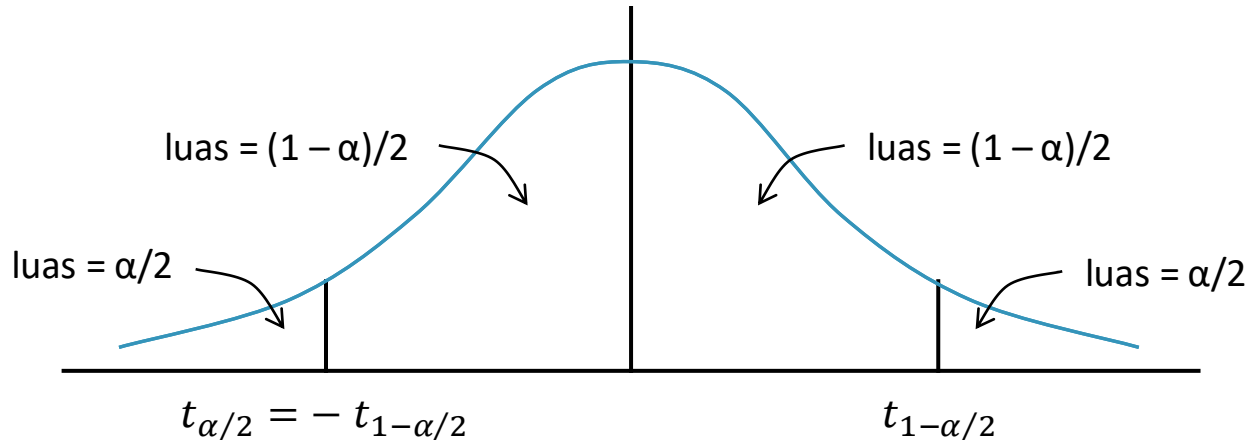
Jadi, rentang keyakinan (*confidence limits*):

$$\ell = \bar{X} + t_{\alpha_a, n-1} s_{\bar{X}} = \bar{X} + t_{\alpha_a, n-1} \frac{s_X}{\sqrt{n}}$$

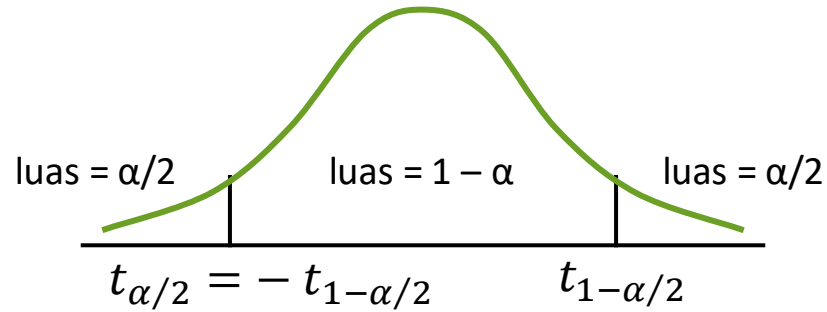
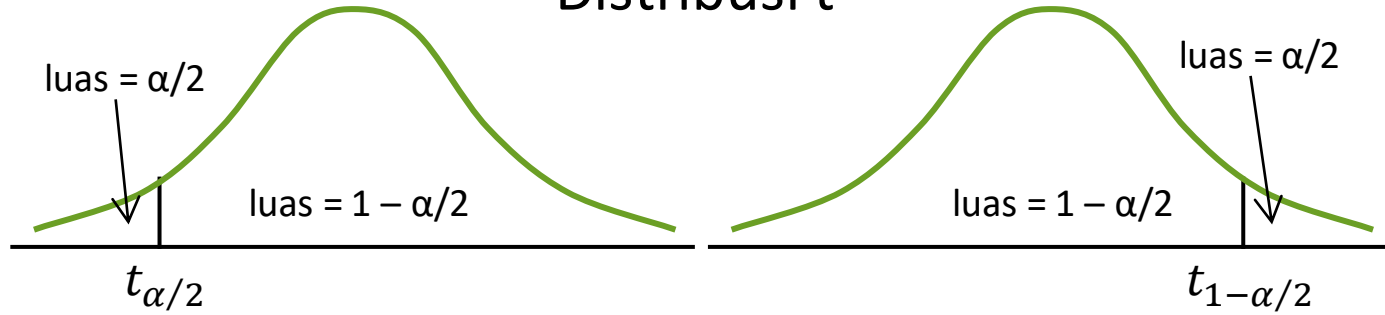
$$u = \bar{X} + t_{1-\alpha_b, n-1} s_{\bar{X}} = \bar{X} + t_{1-\alpha_b, n-1} \frac{s_X}{\sqrt{n}}$$

$t_{\alpha_a, n-1}$   
 $t_{1-\alpha_b, n-1}$ 
} Tabel  
distribusi  $t$

- Jika dikehendaki probabilitas rentang keyakinan simetris, maka  $v_1$  dan  $v_2$  dipilih sedemikian hingga  $\text{prob}(t < v_1) = \text{prob}(t > v_2)$ .
- Karena simetris, maka  $\alpha_a = \alpha_b = \alpha/2$
- Yang dicari adalah rentang keyakinan  $(1 - \alpha) = 100(1 - \alpha)\%$  maka:  $\text{prob}(t < v_1) = \alpha/2 = \text{prob}(t > v_2)$



# Distribusi t



- Dengan demikian, batas rentang keyakinan jika probabilitas rentang keyakinan simetris adalah:

$$l = \bar{X} - t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S_X}{\sqrt{n}}$$

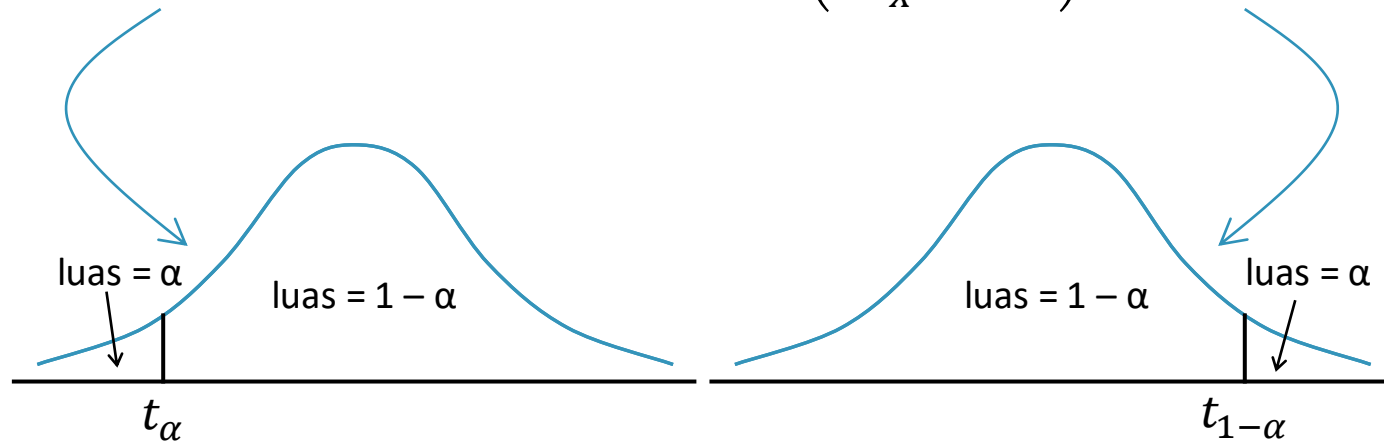
$$u = \bar{X} + t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S_X}{\sqrt{n}}$$

■ Kadang dikehendaki probabilitas rentang keyakinan satu sisi

- batas bawah  $\rightarrow \text{prob}(t < v_1) = \alpha$
- batas atas  $\rightarrow \text{prob}(t > v_2) = \alpha$

$$\text{prob}(V > v_1) = 1 - \alpha \Rightarrow \text{prob}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} > v_1\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}(V < v_2) = 1 - \alpha \Rightarrow \text{prob}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$



# Distribusi $t$

## ■ Notasi

- $t_{\gamma,n}$  = nilai  $t$  sedemikian hingga probabilitas variabel random  $t$  dengan  $n$  *degrees of freedom* adalah lebih kecil daripada  $\gamma$ .
- misalkan:  
 $t_{0.95,50}$  = nilai  $t$  sedemikian hingga  $\text{prob}(t < t_{0.95,50}) = 0.95$  untuk  $t$  yang memiliki 50 *degrees of freedom*.

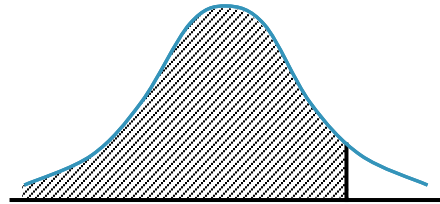


# Distribusi $t$

- Dapat dibaca di tabel distribusi  $t$ 
  - Tabel Distribusi  $t$
- Dapat dihitung dengan perintah/fungsi MSEXcel
  - T.DIST( $t, v, \text{true}$ )
    - menghitung nilai  $\text{prob}(T < t)$
    - untuk menghitung nilai  $\text{prob}(T > t) \rightarrow 1 - \text{T.DIST}(t, v, \text{true})$
    - $t$  = nilai yang diinginkan untuk dicari distribusinya
    - $v$  = *degree of freedom*
    - *one-tailed distribution*
  - T.INV( $p, v$ )
    - mencari nilai  $t$  jika nilai  $p = \text{prob}(T < t)$  diketahui
    - *one-tailed distribution*

# Distribusi t

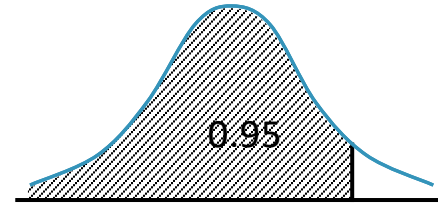
untuk 50 degrees of freedom



$$t = 1.6$$

$$\text{prob}(T < 1.6) = \text{T.DIST}(1.6, 50, \text{TRUE}) = 0.942$$

$$\text{prob}(T < 1.6) = 1 - \text{T.DIST.RT}(1.6, 50) = 0.942$$

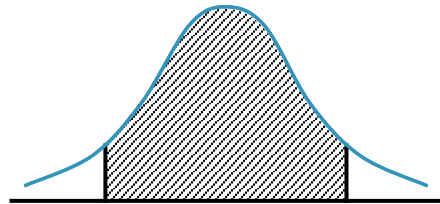


0.95

$$t$$

$$\text{prob}(T < t) = 0.95$$

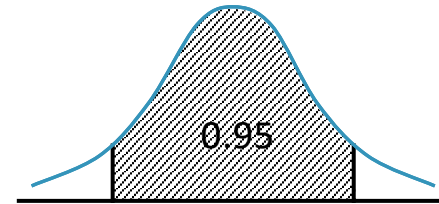
$$t = \text{T.INV}(0.95, 50) = 1.68$$



$$t = -1.6$$

$$t = 1.6$$

$$\text{prob}(-1.6 < T < 1.6) = 1 - \text{T.DIST.2T}(1.6, 50) = 0.884$$



0.95

$$-t$$

$$t$$

$$\text{prob}(-t < T < t) = 0.95$$

$$t = \text{T.INV.2T}(1 - 0.95, 50) = 2$$

# Rentang Keyakinan: $\mu$ suatu distribusi normal

- Apabila varian populasi diketahui, maka variabel random  $V$  didefinisikan sbb.:

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}, \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

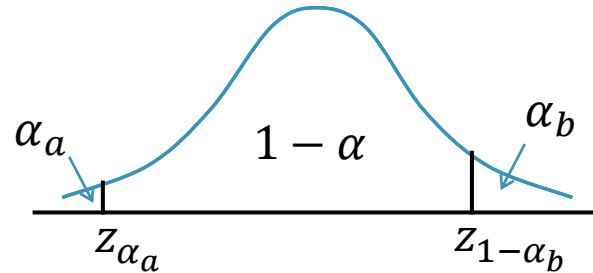
→  $V$  berdistribusi normal

## Rentang Keyakinan: $\mu$ suatu distribusi normal, $\sigma$ diketahui

- Rentang keyakinan

$$l = \bar{X} + z_{\alpha_a} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

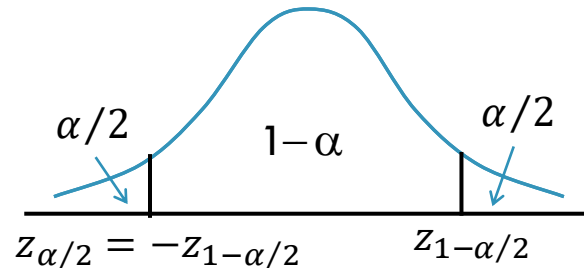
$$u = \bar{X} + z_{1-\alpha_b} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$



- Jika probabilitas rentang keyakinan diinginkan simetris

$$l = \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

$$u = \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$



# Rentang Keyakinan: $\sigma^2$ suatu distribusi normal

- Mencari rentang  $[L, U]$  yang mengandung  $\sigma^2$  dengan peluang  $\text{prob}(L < \sigma^2 < U) = 1 - \alpha$ .
- Didefinisikan variabel random  $V$ :

$$V = \frac{(n - 1)s_X^2}{\sigma_X^2}$$

→  $V$  berdistribusi chi-kuadrat dengan  $(n - 1)$  *degrees of freedom*.

$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

Pilih:  $v_1 = \chi_{\alpha/2, n-1}^2$

$$v_2 = 1 - \chi_{\alpha/2, n-1}^2$$

sehingga:  $\text{prob}\left(\chi_{\alpha/2, n-1}^2 < \frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2} < 1 - \chi_{\alpha/2, n-1}^2\right) = 1 - \alpha$

atau:  $\text{prob}\left(\frac{(n-1)s_X^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2} < \sigma_X^2 < \frac{(n-1)s_X^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}\right) = 1 - \alpha$

- Jadi batas bawah dan batas atas rentang yang mengandung  $\sigma_X^2$  dengan tingkat keyakinan  $(1 - \alpha)$  adalah:

- batas bawah: 
$$l = \frac{(n - 1)s_X^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}$$

- batas atas: 
$$u = \frac{(n - 1)s_X^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}$$

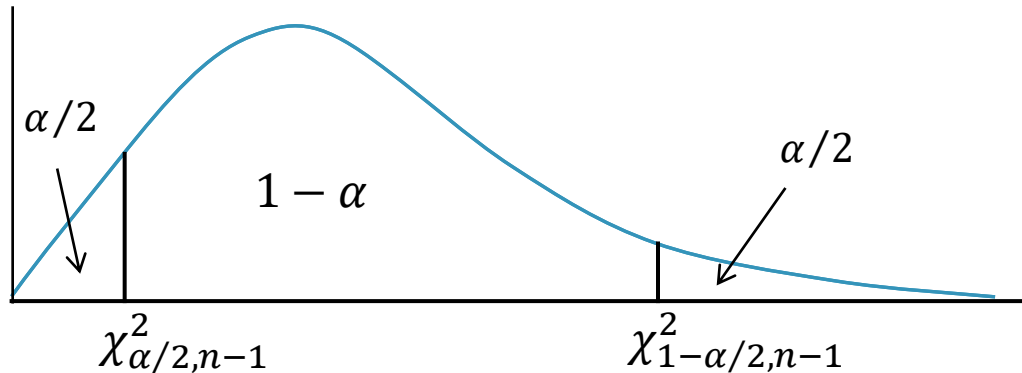
Catatan:  $X$  berdistribusi normal

$\chi^2$  berdistribusi chi-kuadrat

- Distribusi chi-kuadrat tidak simetris:

$$s_X^2 - \ell \neq u - s_X^2$$

$n \gg \rightarrow (n - 1) \gg \rightarrow$  distribusi mendekati distribusi simetris,  
 $s_X^2$  berada kira-kira di tengah-tengah rentang  $[L, U]$ .





# Rentang Keyakinan Satu Sisi

- Hanya diinginkan satu sisi rentang keyakinan saja

- hanya batas bawah rentang keyakinan  $\mu$

$$\text{prob}(L < \theta) = 1 - \alpha \implies \ell = \bar{X} - t_{1-\alpha, n-1}$$

- hanya batas atas saja rentang keyakinan  $\mu$

$$\text{prob}(\theta < U) = 1 - \alpha \implies u = \bar{X} + t_{1-\alpha, n-1}$$

Terima kasih