



Universitas Gadjah Mada
Fakultas Teknik
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan
Prodi Magister Teknik Sipil

Statistika Teknik

Regresi dan Interpolasi

Curve Fitting

- Acuan

- Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
 - Chapter 11 dan 12, pp. 319-398.

Curve Fitting

- Mencari garis/kurva yang mewakili serangkaian titik data
- Ada dua cara untuk melakukannya, yaitu
 - Regresi
 - Interpolasi
- Aplikasi di bidang enjiniring
 - Pola perilaku data
 - Uji hipotesis

Curve Fitting

■ Regresi

- Apabila data menunjukkan tingkat kesalahan yang cukup signifikan atau menunjukkan adanya noise
- Untuk mencari satu kurva tunggal yang mewakili pola umum perilaku data
- Kurva yang dicari tidak perlu melewati setiap titik data

■ Interpolasi

- Diketahui bahwa data sangat akurat
- Untuk mencari satu atau serangkaian kurva yang melewati setiap titik data
- Untuk memperkirakan nilai-nilai di antara titik-titik data

Curve Fitting

- Ekstrapolasi
 - Mirip dengan interpolasi, tetapi untuk memperkirakan nilai-nilai di luar kisaran titik-titik data
 - Ekstrapolasi tidak disarankan

Curve Fitting terhadap Data Pengukuran

- Analisis pola perilaku data
 - Pemanfaatan pola data (pengukuran, eksperimen) untuk melakukan perkiraan
 - Apabila data persis (akurat): interpolasi
 - Apabila data tak persis (tak akurat): regresi
- Uji hipotesis
 - Perbandingan antara hasil teori atau hasil hitungan dengan hasil pengukuran

Beberapa Besaran Statistik

merepresentasikan sebaran data

- Rata-rata aritmatik, *mean*



$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

- Deviasi standar, simpangan baku, *standard deviation*



$$s_Y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}}$$

$$S_t = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2$$

- Varian ('ragam'), *variance*



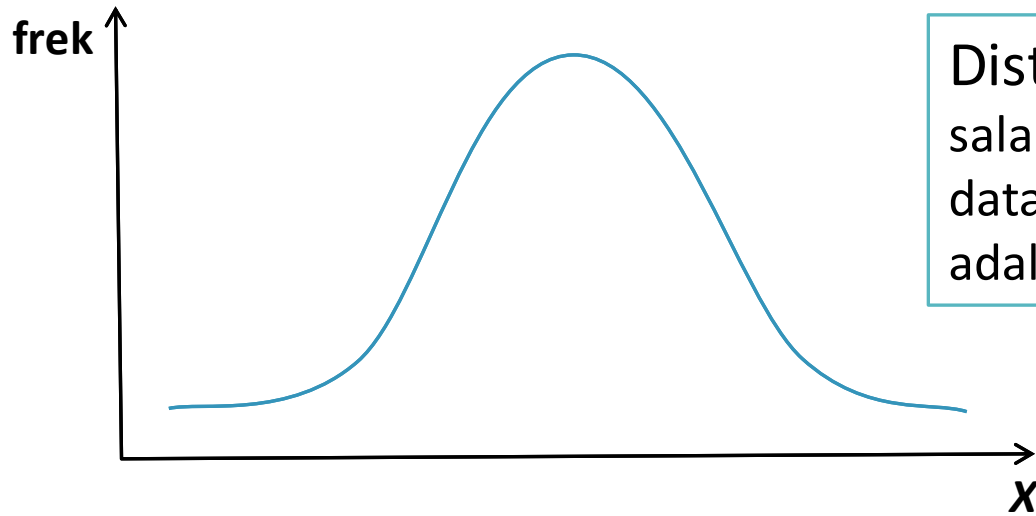
$$s_Y^2 = \frac{S_t}{n-1}$$

- *Coefficient of variation*



$$c. v. = \frac{s_Y}{\bar{Y}} \times 100\%$$

Distribusi Probabilitas



Distribusi Normal
salah satu distribusi/sebaran
data yang sering dijumpai
adalah distribusi normal

Regresi dan Interpolasi

Regresi Linear

Regresi: Metode Kuadrat Terkecil

- Mencari satu kurva atau satu fungsi (pendekatan) yang sesuai dengan pola umum yang ditunjukkan oleh data
 - Datanya menunjukkan kesalahan yang cukup signifikan
 - Kurva tidak perlu memotong setiap titik data
- Metode
 - Regresi linear
 - Regresi persamaan-persamaan tak-linear yang dilinearkan
 - Regresi polinomial
 - Regresi linear ganda
 - Regresi tak-linear

Regresi: Metode Kuadrat Terkecil

- Bagaimana caranya?
 - Program komputer
 - *Spreadsheet* (Microsoft Excel)
- Program aplikasi gratis, mirip MatLab
 - Octave
 - Scilab
 - Freemath

Regresi Linear

- Mencari suatu kurva lurus yang cocok menggambarkan pola serangkaian titik data: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

$$y_{reg} = a_0 + a_1x$$

a_0 *intercept*

a_1 *slope*

- Microsoft Excel
 - INTERCEPT($y_1:y_n, x_1:x_n$)
 - SLOPE ($y_1:y_n, x_1:x_n$)

Regresi Linear

- Kesalahan atau residu (e) adalah perbedaan antara nilai y sesungguhnya (data y) dan y nilai pendekatan (y_{reg}) menurut persamaan linear $y_{reg} = a_0 + a_1x$

$$e = y - y_{reg} = y - (a_0 + a_1x) = y - a_0 - a_1x$$

- Minimumkan jumlah kuadrat residu tersebut

$$\min[S_r] = \min \left[\sum e_i^2 \right] = \min \left[\sum (y_i - a_0 - a_1x_i)^2 \right]$$

Regresi Linear

- Cara mendapatkan koefisien a_0 dan a_1
 - Diferensialkan persamaan tersebut dua kali, masing-masing terhadap a_0 dan a_1

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i) \qquad \frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i$$

- Samakan kedua persamaan hasil diferensiasi tersebut dengan nol

$$\sum (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \qquad \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i = 0$$

Regresi Linear

- Cara mendapatkan koefisien a_0 dan a_1
 - Selesaikan persamaan tersebut untuk mendapatkan a_0 dan a_1

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

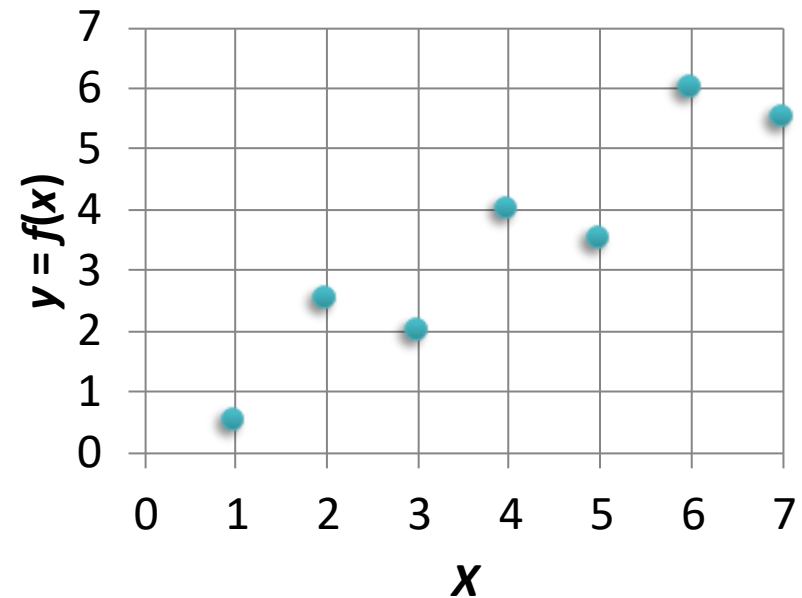
- Dalam hal ini, \bar{y} dan \bar{x} masing-masing adalah nilai y rerata dan x rerata

Contoh #1

Tabel data

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	1	0.5
1	2	2.5
2	3	2
3	4	4
4	5	3.5
5	6	6
6	7	5.5

Grafik data



Hitungan Regresi Linear

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_{reg}	$(y_i - y_{reg})^2$	$(y_i - y_{mean})^2$
0	1	0.5	0.5	1	0.910714	0.168686	8.576531
1	2	2.5	5	4	1.75	0.5625	0.862245
2	3	2.0	6	9	2.589286	0.347258	2.040816
3	4	4.0	16	16	3.428571	0.326531	0.326531
4	5	3.5	17.5	25	4.267857	0.589605	0.005102
5	6	6.0	36	36	5.107143	0.797194	6.612245
6	7	5.5	38.5	49	5.946429	0.199298	4.290816
$\Sigma =$	28	24.0	119.5	140	$\Sigma =$	2.991071	22.71429

Hitungan Regresi Linear

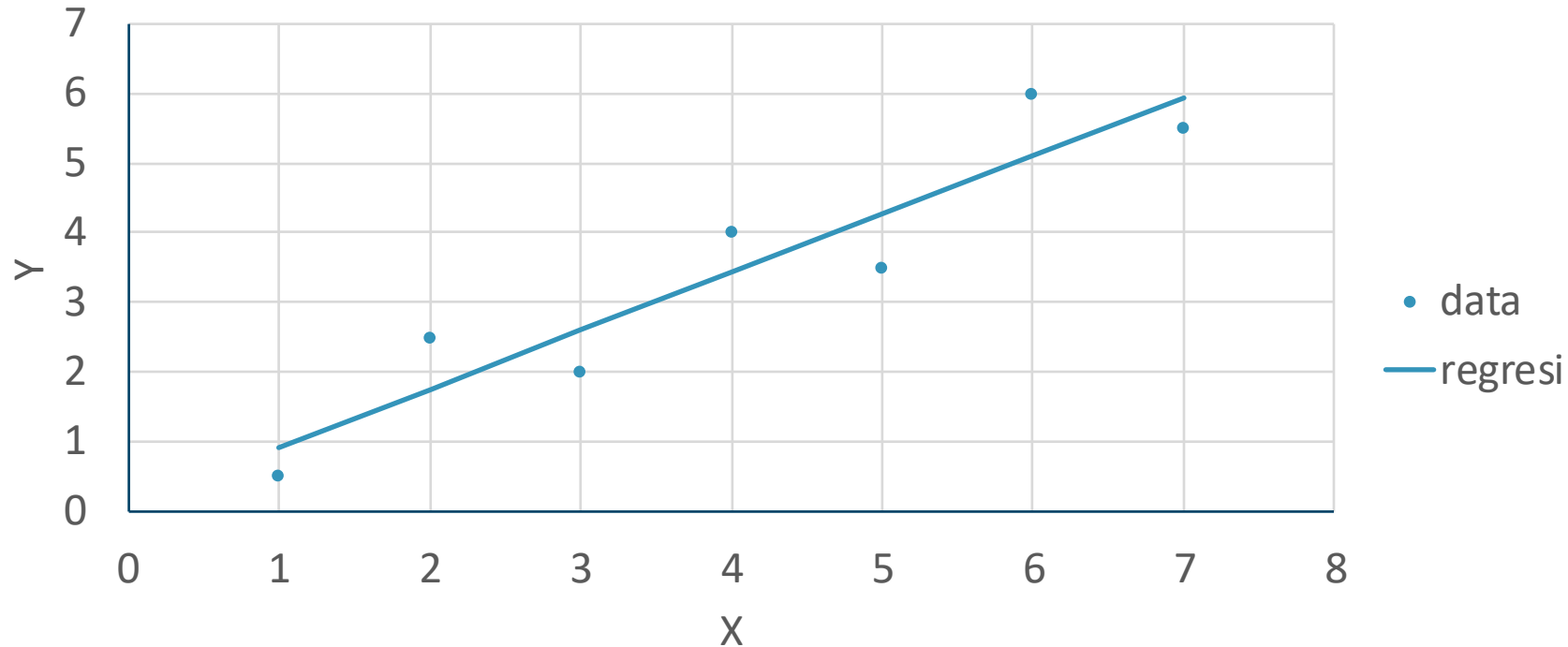
$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{7 \times 119.5 - 28 \times 24}{7 \times 140 - 28^2} = 0.839286$$

$$\bar{y} = \frac{24}{7} = 3.4$$

$$\bar{x} = \frac{28}{7} = 4$$

$$a_0 = 3.4 - 0.839286 \times 4 = 0.071429$$

Grafik Regresi Linear



Regresi Linear

- Kuantifikasi kesalahan

- Kesalahan standar

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}} \quad S_r = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

- Perhatikan kemiripannya dengan simpangan baku

$$s_y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}} \quad S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

Regresi Linear

- Beda antara kedua kesalahan tersebut menunjukkan perbaikan atau pengurangan kesalahan

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

→ koefisien determinasi
(*coefficient of determination*)

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

→ koefisien korelasi
(*correlation coefficient*)

Hitungan Regresi Linear

$$S_r = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 = 2.991071$$

$$S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2 = 22.71429$$

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} = \frac{22.71429 - 2.991071}{22.71429}$$

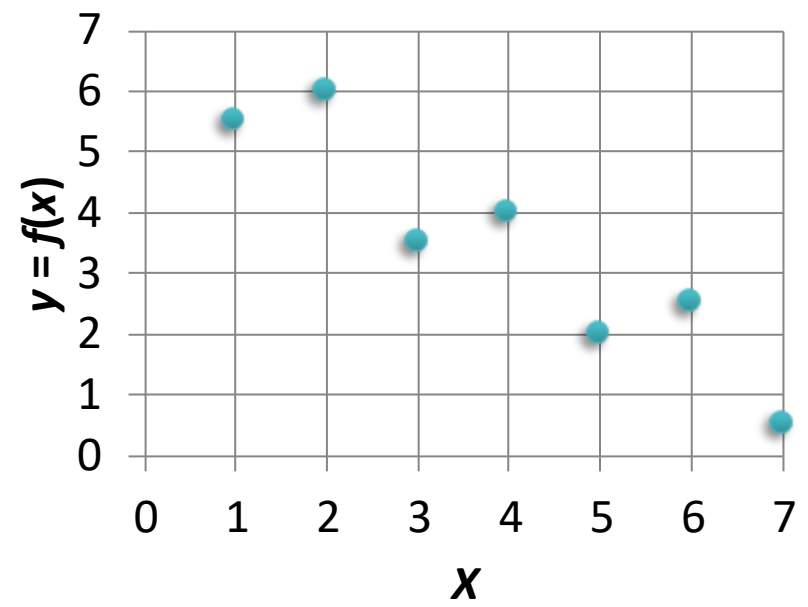
$$r = 0.931836$$

Contoh #2

Tabel data

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	1	5.5
1	2	6
2	3	3.5
3	4	4
4	5	2
5	6	2.5
6	7	0.5

Grafik/kurva data



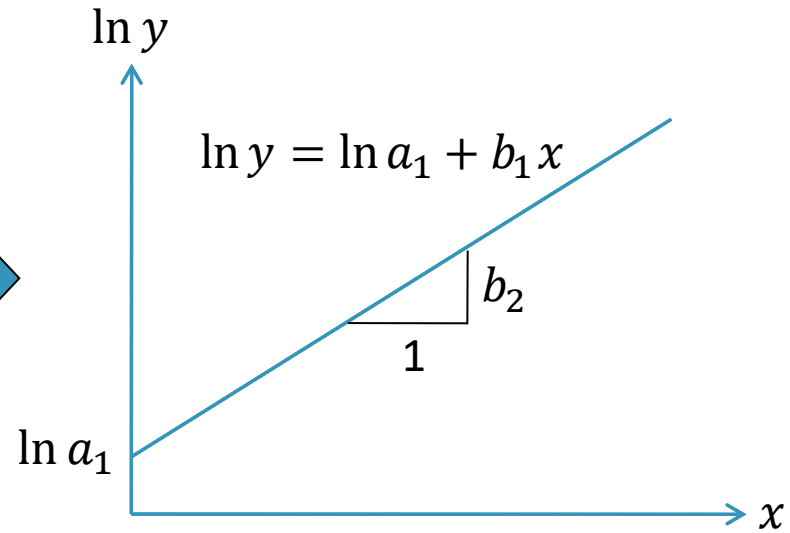
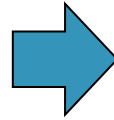
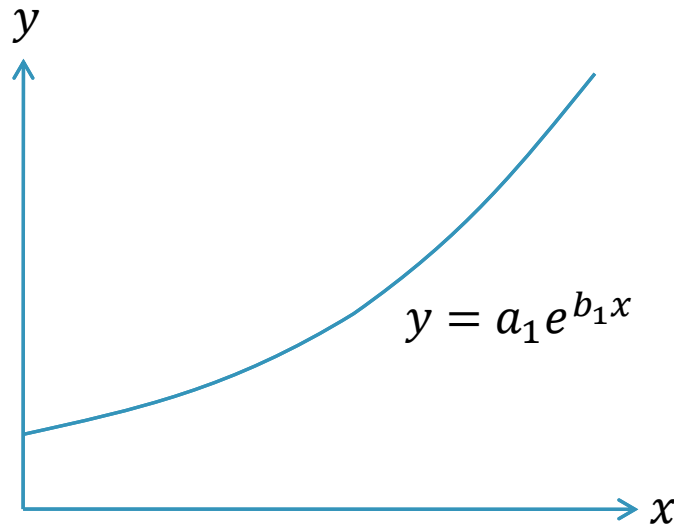
Regresi dan Interpolasi

Regresi persamaan non-linear

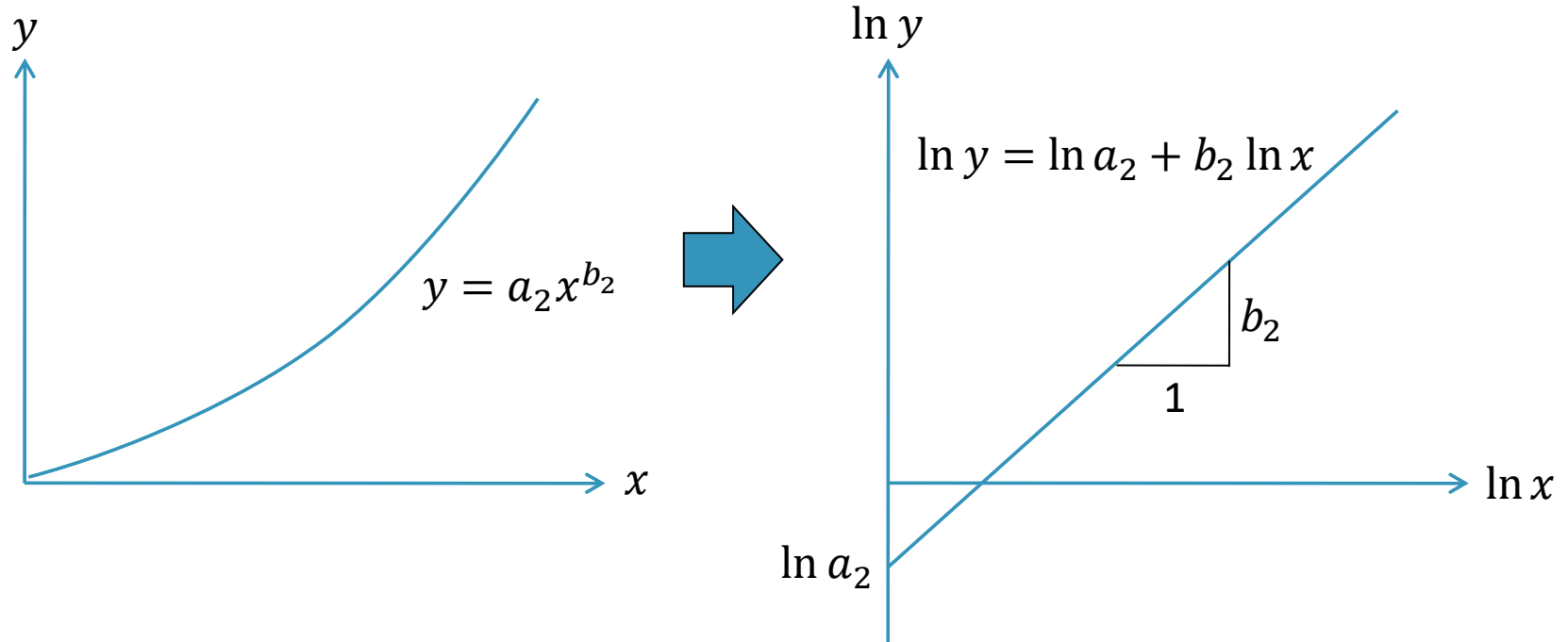
Regresi Linear

- Linearisasi persamaan-persamaan non-linear
 - Logaritmik menjadi linear
 - Eksponensial menjadi linear
 - Pangkat (polinomial tingkat $n > 1$) menjadi linear (polinomial tingkat 1)
 - Dll.

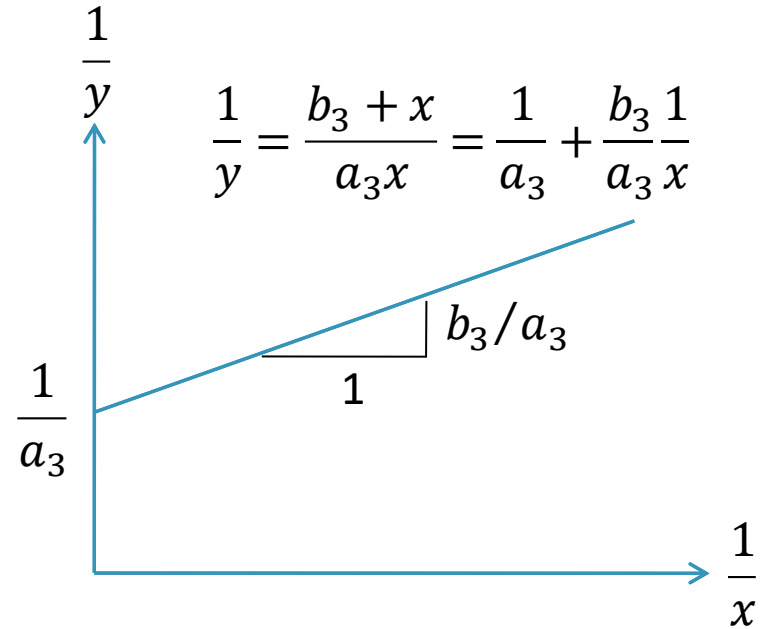
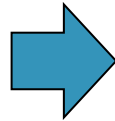
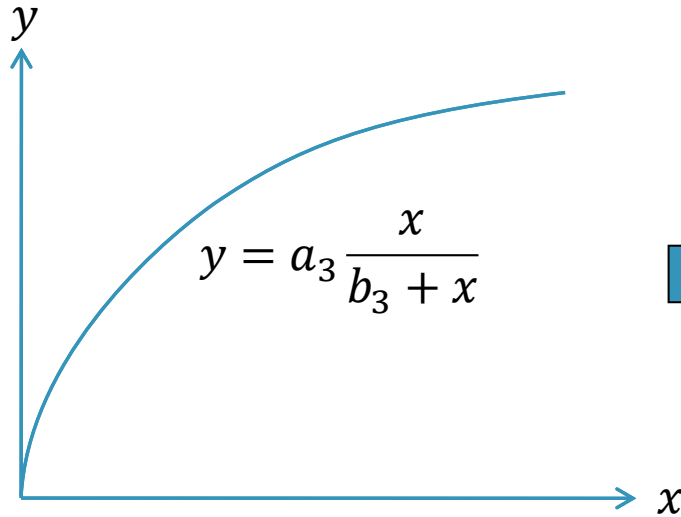
Linearisasi Persamaan Non-linear



Linearisasi Persamaan Non-linear



Linearisasi Persamaan Non-linear



Regresi dan Interpolasi

Regresi Polinomial

Regresi Polinomial

- Sebagian data bidang teknik, walaupun menunjukkan pola yang jelas, namun pola tsb tidak dapat diwakili oleh sebuah garis lurus
 - Metode 1: transformasi koordinat (linearisasi persamaan non-linear)
 - Metode 2: regresi polinomial

- Polinomial tingkat m

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

- Jumlah residu kuadrat

$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_mx_i^m)^2$$

- Metode kuadrat terkecil yang diperluas untuk regresi polinomial tingkat m

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^n x_i^2 (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m)$$

⋮

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_m} = -2 \sum_{i=1}^n x_i^m (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m)$$

- Persamaan-persamaan tersebut disamakan dengan nol dan disusun sedemikian rupa menjadi sistem persamaan linear

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m) = 0$$

⋮

$$\sum_{i=1}^n x_i^m (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m) = 0$$

- Ada $m+1$ persamaan linear dengan $m+1$ variabel tak diketahui, yaitu $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m &= \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{2m} &= \sum_{i=1}^n x_i^m y_i \end{aligned}$$

- Persamaan-persamaan linear ini dapat diselesaikan dengan metode
 - Eliminasi Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Iterasi Jacobi
 - Inversi matriks

■ Inversi matriks

$$\begin{bmatrix}
 n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^m \\
 \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \\
 \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \sum_{i=1}^n x_i^m & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2m}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 a_0 \\
 a_1 \\
 a_2 \\
 \vdots \\
 a_m
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 \sum_{i=1}^n y_i \\
 \sum_{i=1}^n x_i y_i \\
 \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\
 \vdots \\
 \sum_{i=1}^n x_i^m y_i
 \end{Bmatrix}$$

■ Inversi matriks

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^m \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m y_i \end{Bmatrix}$$

Contoh

- Temukanlah kurva polinomial tingkat 2 yang mewakili pola sebaran data pada tabel di sisi kanan ini

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

- Jawab

$$y = 2.47857 + 2.35929x + 1.86071x^2$$

$$r^2 = 1 - \frac{S_r}{S_t} = 1 - \frac{3.74657}{2513.39} = 0.99851$$

$$r = 0.99925$$

x_i	y_i
0	2.1
1	7.7
2	13.6
3	27.2
4	40.9
5	61.1

Regresi dan Interpolasi

Regresi Linear Ganda *(Multiple Linear Regression)*

Regresi Linear Ganda

- Misal variabel y adalah fungsi linear dua variabel bebas x_1 dan x_2

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$$

- Koefisien a_0, a_1, a_2 dalam persamaan di atas dapat ditemukan dengan metode kuadrat terkecil kesalahan

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_1 - a_2x_2)^2$$

Regresi Linear Ganda

- Diferensial parsial persamaan tersebut terhadap masing-masing koefisien

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_{1i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^n x_{2i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})$$

Regresi Linear Ganda

- Samakan persamaan diferensial tsb dengan nol dan atur suku-suku dalam persamaan

$$na_0 + \sum_{i=1}^n x_{1i}a_1 + \sum_{i=1}^n x_{2i}a_2 = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_{1i}a_0 + \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{1i}a_1 + \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i}a_2 = \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_{2i}a_0 + \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i}a_1 + \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{2i}a_2 = \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i$$

Regresi Linear Ganda

- Persamaan-persamaan linear tersebut dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i} \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{2i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i \end{Bmatrix}$$

Regresi Linear Ganda

- Inversi matriks

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i} \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{2i} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i \end{Bmatrix}$$

Contoh

- Temukanlah persamaan linear yang mewakili pola sebaran data dalam tabel di samping ini

- Jawab

$$y = 5 + 4x_1 - 3x_2$$

$$r^2 = 1$$

x_1	x_2	y
0	0	5
2	1	10
2.5	2	9
1	3	0
4	6	3
7	2	27

Regresi Linear Ganda

- Regresi linear ganda dapat dipakai dalam kasus hubungan antar variabel yang berupa persamaan pangkat (*power equations*)

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}$$

- Persamaan di atas sangat bermanfaat pada kasus *fitting* data eksperimen
- Persamaan di atas ditransformasikan menjadi persamaan linear

$$\log y = \log a_0 + a_1 \log x_1 + a_2 \log x_2 + \dots + a_m \log x_m$$

Regresi dan Interpolasi

Bentuk Umum Persamaan Regresi Linear (Metode Kuadrat Terkecil)

Regresi Linear (Kuadrat Terkecil)

- Tiga jenis regresi yang telah dipaparkan, yaitu regresi linear, regresi polinomial, dan regresi linear ganda dapat dituliskan dalam bentuk umum model kuadrat terkecil

$$y = a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_mz_m$$

- z_0, z_1, \dots, z_m adalah fungsi-fungsi yang berjumlah $m + 1$
 - $m + 1$ adalah jumlah variabel bebas
 - n adalah jumlah data
- Persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matriks

$$\{Y\} = [Z]\{A\}$$

Regresi Linear (Kuadrat Terkecil)

$$\{Y\} = [Z]\{A\} \quad \longrightarrow \quad [Z]^T[Z]\{A\} = [Z]^T\{Y\}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{01} & z_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & z_{m1} \\ z_{11} & z_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{0n} & a_{1n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- $\{Y\}$ adalah vektor kolom variabel tak bebas
- $[Z]$ adalah matriks data nilai variabel bebas
- $\{A\}$ adalah vektor kolom koefisien yang tidak diketahui

$$S_r = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j z_{ji} \right)^2$$

Regresi Linear (Kuadrat Terkecil)

$$[Z]^T [Z] \{A\} = [Z]^T \{Y\}$$

- Strategi penyelesaian

- Dekomposisi LU
- Metode Cholesky
- Inversi matriks

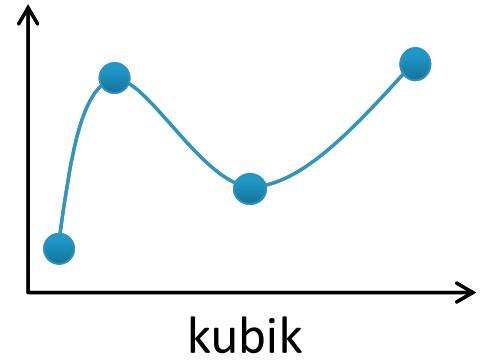
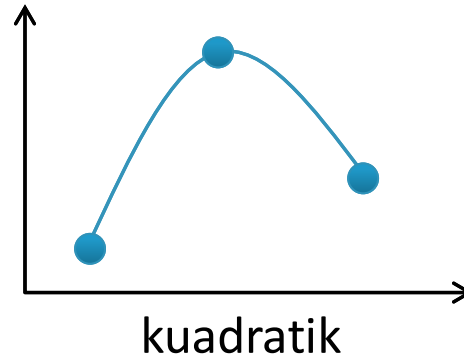
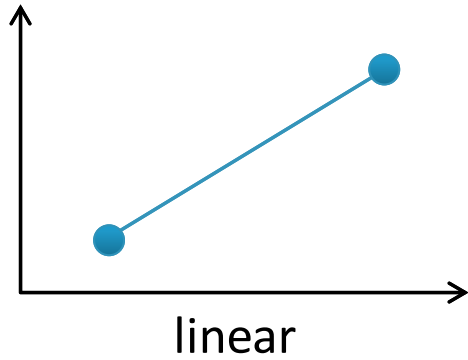


$$\{A\} = [[Z]^T [Z]]^{-1} [Z]^T \{Y\}$$

Regresi dan Interpolasi

Interpolasi

Interpolasi



Interpolasi

- Situasi
 - Keperluan untuk memperkirakan nilai variabel di antara data akurat yang diketahui
 - Metode yang paling sering dipakai untuk keperluan tersebut adalah interpolasi polinomial

- Bentuk umum persamaan polinomial tingkat n

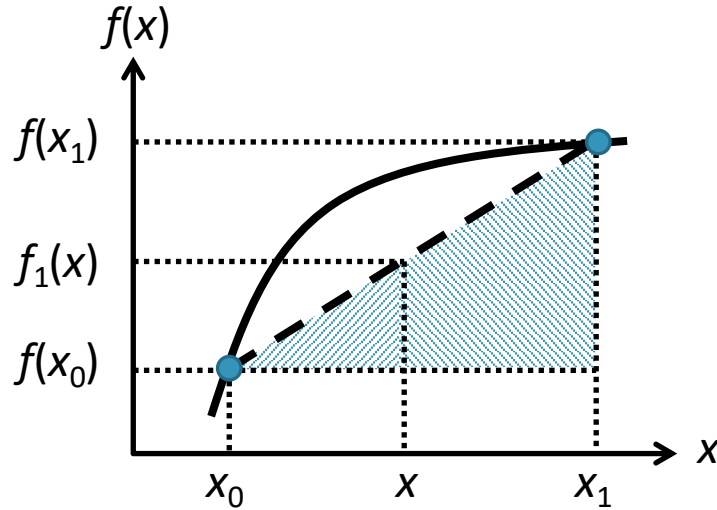
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

- Hanya ada satu polinomial tingkat n atau tingkat yang lebih kecil yang melalui semua $n + 1$ titik data

Interpolasi

- Penyelesaian persamaan polinomial tingkat n membutuhkan sejumlah $n + 1$ titik data
- Metode untuk mencari polinomial tingkat n yang merupakan interpolasi sejumlah $n + 1$ titik data:
 - Metode Newton
 - Metode Lagrange

Interpolasi Linear: Metode Newton



$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Interpolasi Kuadratik: Metode Newton

$$\begin{aligned}f_2(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \\&= b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2x^2 + b_2x_0x_1 - b_2xx_0 - b_2xx_1 \\&= (b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1) + (b_1 - b_2x_0 - b_2x_1)x + (b_2)x^2\end{aligned}$$



$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \begin{cases} a_1 = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1 \\ a_2 = b_1 - b_2x_0 - b_2x_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

Interpolasi Kuadratik: Metode Newton

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

Interpolasi Polinomial: Metode Newton

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$



$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

⋮

⋮

⋮

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0]$$

Interpolasi Polinomial: Metode Newton

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \dots \\ (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$$

Interpolasi Polinomial: Metode Newton


i	x_i	$f(x_i)$	Langkah Hitungan		
			ke-1	ke-2	ke-3
0	x_0	$f(x_0)$	\longrightarrow $f[x_1, x_0]$	\longrightarrow $f[x_2, x_1, x_0]$	\longrightarrow $f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	\longrightarrow $f[x_2, x_1]$	\longrightarrow $f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	\longrightarrow $f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

Interpolasi Polinomial: Metode Lagrange

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Interpolasi Polinomial: Metode Lagrange

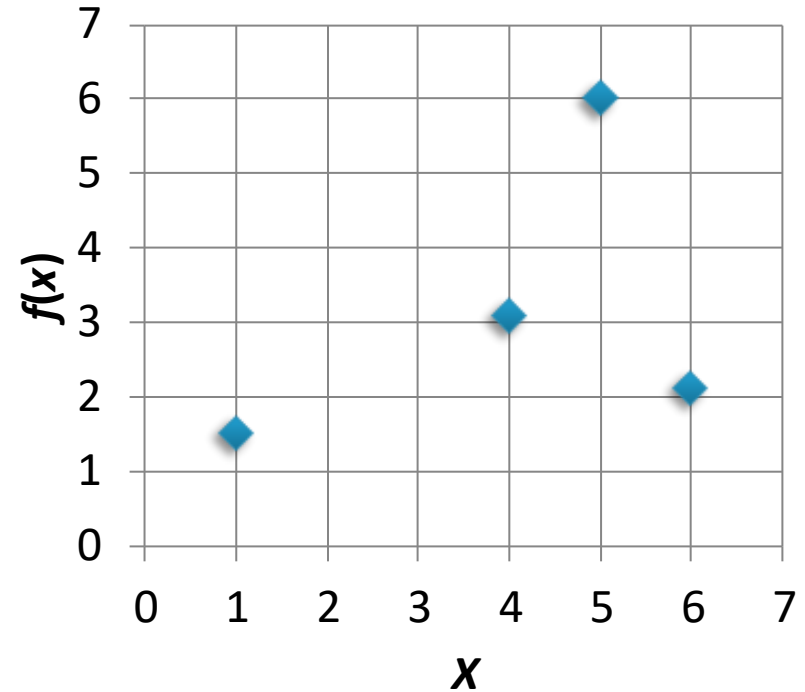
$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$


- Contoh interpolasi polinomial order 3:

$$f_3(x) = \left[\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \right] f(x_0) + \left[\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \right] f(x_1) + \dots$$
$$+ \left[\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \right] f(x_2) + \left[\frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \right] f(x_3)$$

Contoh interpolasi

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1.5
1	4	3.1
2	5	6
3	6	2.1



Regresi dan Interpolasi

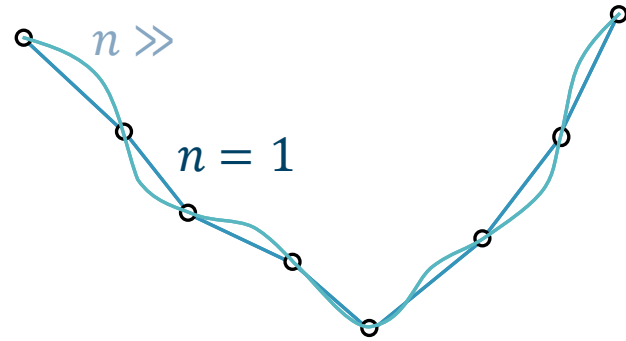
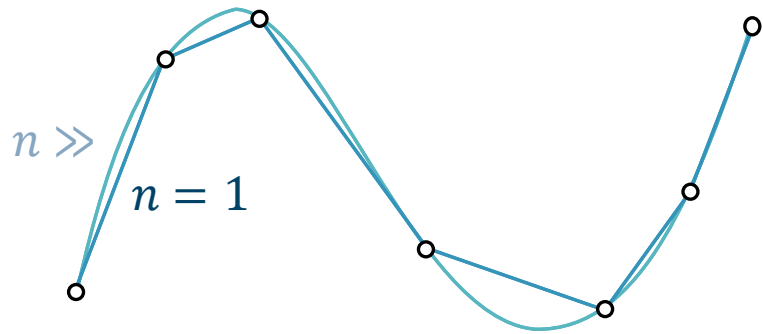
Spline

Interpolasi: Spline

- Jumlah titik data $n + 1 \rightarrow$ interpolasi polinomial tingkat n
 - Tingkat besar, $n \gg$, mengalami kesulitan apabila titik-titik data menunjukkan adanya perubahan tiba-tiba di suatu titik tertentu (perubahan gradien secara tiba-tiba)
 - Dalam situasi tsb, polinomial tingkat kecil, $n \ll$, dapat lebih representatif untuk mewakili pola data
 - Spline
 - *Cubic splines* ($n = 3$)
 - *Quadratic splines*
 - *Linear splines*

Interpolasi Polinomial vs *Spline*

- Polinomial tingkat n



Linear Splines

- *Spline* tingkat 1 : garis lurus
- Data urut : $x_0, x_1, x_3, \dots, x_n$

$$f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

⋮

$$f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

Gradien:

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Linear Splines

- *Linear spline*
 - Dengan demikian, *linear spline* adalah sama dengan interpolasi linear
 - Kekurangan *linear spline* adalah ketidak-mulusan kurva interpolasi
 - Terdapat perubahan *slope* yang sangat tajam di titik-titik data atau di titik-titik pertemuan kurva *spline* (*knot*)
 - Derivatif pertama fungsi *linear spline* diskontinu di titik-titik *knot*
 - Kelemahan *linear spline* tersebut diatasi dengan pemakaian polinomial yang memiliki tingkat lebih tinggi yang menjamin kemulusan kurva *spline* di *knots* dengan cara menyamakan nilai derivatif di titik-titik *knot*

Quadratic Splines

■ Quadratic splines

- Untuk mendapatkan kurva yang memiliki diferensial/laju-perubahan ke- m kontinu di titik *knot*, maka diperlukan kurva *spline* yang bertingkat paling kecil $m + 1$
- Yang paling banyak dipakai adalah *spline* tingkat 3 (*cubic spline*): diferensial pertama dan kedua kontinu di titik-titik *knot*
 - Ketidak-mulusan diferensial ketiga, keempat, dst. umumnya tidak begitu tampak secara visual

Quadratic Splines

- Tujuan: mendapatkan polinomial tingkat 2 untuk setiap interval titik-titik data
- Polinomial tingkat 2 tsb harus memiliki diferensial pertama (laju perubahan) yang kontinu di titik-titik data
- Polinomial tingkat 2:

$$f(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

- Untuk $n + 1$ titik data ($i = 1, 2, \dots, n$), terdapat n interval, sehingga terdapat $3n$ koefisien yang harus dicari $(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, \dots, n$
- Perlu persamaan sejumlah $3n$

Quadratic Splines

- Ke- $3n$ persamaan tsb adalah (1)
 - Kurva *spline* memotong titik-titik data (*knot*): interval $i - 1$ dan i bertemu di titik data $\{x_{i-1}, f(x_{i-1})\}$

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

$$i = 2, 3, \dots, n$$

$$2(n - 1) \text{ pers.}$$

Quadratic Splines

- Ke- $3n$ persamaan tsb adalah (2)
 - Kurva *spline* di interval pertama memotong titik data pertama ($i = 1$) dan kurva *spline* di interval terakhir memotong titik data terakhir ($i = n$)

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

2 pers.

Quadratic Splines

■ Ke- $3n$ persamaan tsb adalah (3)

- Diferensial (gradien) kurva *spline* di dua interval berurutan adalah sama di titik data yang bersangkutan

$$f'(x) = 2ax + b \implies 2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i \quad i = 2, 3, \dots, n$$

($n - 1$) pers.

- Diferensial kedua (laju perubahan gradien) kurva *spline* di titik data pertama sama dengan nol

$$a_i = 0 \quad 1 \text{ pers.}$$



Konsekuensi: 2 titik data pertama ($i = 0$ dan $i = 1$) dihubungkan dengan garis lurus

Quadratic Splines

- Dengan demikian, jumlah persamaan seluruhnya adalah $2(n - 1) + 2 + (n - 1) + 1 = 3n$

Cubic Splines

- Tujuan: mencari polinomial tingkat 3 untuk setiap interval titik-titik data.

- Polinomial tingkat 3 tsb harus memiliki diferensial pertama (gradien) dan diferensial kedua (laju perubahan gradien) yang kontinu di titik-titik data.
- Polinomial orde 3:

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- Untuk $(n + 1)$ titik data ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), terdapat n interval, shg. terdapat $4n$ koefisien yang harus dicari (a_i, b_i, c_i, d_i) , $i = 1, 2, \dots, n$
 - Perlu persamaan sejumlah $4n$

Cubic Splines

- Ke- $4n$ persamaan tsb adalah sbb.
 - Kurva spline memotong titik-titik data (knot): interval $i - 1$ dan i bertemu di titik data $\{x_{i-1}, f(x_{i-1})\} \rightarrow (2n - 2)$ pers.
 - Kurva *spline* di interval pertama memotong titik data pertama dan kurva *spline* terakhir memotong titik data terakhir $\rightarrow 2$ pers.
 - Diferensial pertama kurva *spline* di dua interval berurutan adalah sama di titik data ybs. $\rightarrow (n - 1)$ pers.
 - Diferensial kedua kurva *spline* di dua interval berurutan adalah sama di titik data ybs. $\rightarrow (n - 1)$ pers.
 - Diferensial kedua kurva *spline* di titik data pertama dan terakhir sama dengan nol $\rightarrow 2$ pers.

Cubic Splines

- Ke- $4n$ persamaan tsb.
 - Syarat kelima membawa konsekuensi sbb.
 - Kurva *spline* di interval pertama dan interval terakhir berupa garis lurus
 - dua titik data pertama dihubungkan dengan sebuah garis lurus
 - dua titik data terakhir dihubungkan dengan sebuah garis lurus
 - Ada sebuah syarat alternatif sebagai pengganti syarat kelima tsb
 - Derivatif kedua di titik *knot* terakhir diketahui

Cubic Splines

- Diperoleh $4n$ persamaan yang harus diselesaikan untuk mencari $4n$ koefisien, a_i, b_i, c_i, d_i

$$2(n - 1) + 2 + (n - 1) + (n - 1) + 2 = 4n$$

- Dimungkinkan untuk melakukan manipulasi matematis shg diperoleh suatu teknik cubic splines yang hanya memerlukan $n - 1$ penyelesaian (lihat uraian di buku acuan)
 - Chapra, S.P., Canale, R.P., 1985, *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill Book Co., New York, hlm. 395-396).

Cubic Splines

2 unknowns di setiap interval:
 $f''(x_{i-1})$ dan $f''(x_i)$

$$f_i(x) = \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})} (x_i - x)^3 + \frac{f''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})} (x - x_{i-1})^3 + \left[\frac{f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x_i - x) + \left[\frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x - x_{i-1})$$

$$(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) = \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{(x_i - x_{i-1})} [f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ interval} \\ f''(x_0) = 0 \\ f''(x_n) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (n - 1) \text{ pers.}$$

Terima kasih