Universitas Gadjah Mada
Fakultas Teknik
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan
Prodi Magister Teknik Pengelolaan Bencana Alam

Teknik Pengolahan Data

Rentang Keyakinan

Rentang Keyakinan

- Estimasi Parameter
  - Distribusi probabilitas memiliki sejumlah parameter.
  - Parameter-parameter tsb umumnya tak diketahui.
  - Nilai parameter tersebut diperkirakan (di-estimasi-kan) berdasarkan nilai yang diperoleh dari pengolahan data.
  - Estimasi
    - Estimasi tunggal (*point estimates*)
    - Rentang keyakinan (*confidence intervals*)

Rentang Keyakinan

- Estimasi tunggal
  - Contoh
    - Nilai rata-rata sampel sbg estimasi nilai rata-rata populasi.

      $\bar{X} \rightarrow \mu$

    - Nilai simpangan baku sampel sbg estimasi nilai simpangan baku populasi.

      $s_X \rightarrow \sigma_X$

Rentang Keyakinan

- Estimasi parameter θ

$\hat{\theta} \rightarrow \theta$

parameter

estimasi

Dicari suatu interval [*L*,*U*] yang memiliki probabilitas (1 – α) bahwa interval tsb mengandung θ

$$\boxed{\text{prob}(L < \theta < U) = (1 - \alpha)}$$

→ Pers (1)

L = batas bawah rentang keyakinan.

U = batas atas rentang keyakinan.

(1 – α) = tingkat keyakinan (*confidence level*, *confidence coefficient*).

L dan *U* = variabel random

Rentang Keyakinan

- Contoh
  - Data debit puncak tahunan Sungai XYZ selama 66 tahun (sampel) menunjukkan bahwa debit rata-rata adalah 660 m^3/s.
    - Kita dapat memperkirakan debit rata-rata Sungai A (populasi) adalah 660 m^3/s.

      $$\mu_Q = \bar{Q} = 660\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

    - Kita menyadari bahwa perkiraan tsb dapat salah; bahkan dari sisi pengertian probabilitas, kita tahu bahwa debit rata-rata sama dengan 660 m^3/s adalah hampir tidak mungkin terjadi:

      prob(μ_Q = 660 m^3/s) = 0

Batas Bawah dan Batas Atas Rentang Keyakinan

- Metode Ostle: *method of pivotal quantities*
  - Dicari variabel random V yang merupakan fungsi parameter θ (θ = *unknown*), tetapi distribusi V ini tidak bergantung pada parameter yang tidak diketahui
  - Ditentukan v_1 dan v_2 sedemikian hingga:

    prob($v_1 < V < v_2$) = $1-\alpha$ → Pers. (2)

Batas Bawah dan Batas Atas Rentang Keyakinan

- Metode Ostle: *method of pivotal quantities*

$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha$$

  - Persamaan di atas diubah kedalam bentuk
    prob($L < \theta < U$) = $1 - \alpha$
  - L dan U adalah variabel random dan fungsi V, tetapi bukan fungsi θ

Rentang Keyakinan *mean*, μ (varians σ tidak diketahui)

- Mencari interval [L,U] yang mengandung μ, prob($L < \mu < U$) = 1 – α
- Misalkan variabel random V:

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}}$$

  - V berdistribusi t dengan (n – 1) *degrees of freedom*
  - n adalah jumlah sampel yang dipakai untuk menghitung nilai rata-rata sampel, $\bar{X}$

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} \quad \text{berdistribusi t?}$$

- Bukti

Distribusi t: $X = Y \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{U}}$ ν = *degrees of freedom*

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s_X^2/n}} = \frac{(\bar{X} - \mu)/\sigma}{\sqrt{s_X^2/\sigma\sqrt{n}}} = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{s_X^2/\sigma^2}}$$

$$= \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2/\sigma^2}} = Y \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{U}}$$

$$\boxed{\rightarrow Y = \frac{\bar{X} - \mu}{\nu/\sqrt{n}}, \qquad U = \frac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2}, \qquad \nu = n - 1}$$

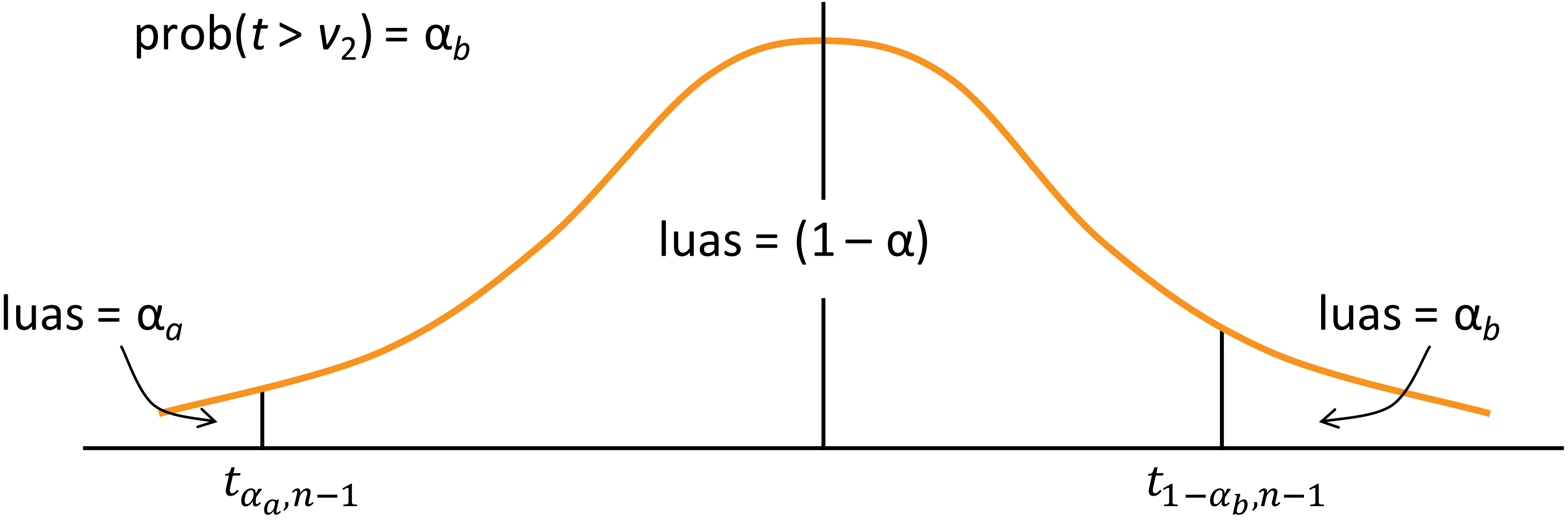
- Pers. (2)

$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha \Longrightarrow \text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

$\alpha_a + \alpha_b = \alpha$

$\text{prob}(t < v_1) = \alpha_a$ dengan $(n - 1)$ *degrees of freedom*

$\text{prob}(t > v_2) = \alpha_b$



$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(t_{\alpha_a, n-1} < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < t_{1-\alpha_b, n-1}\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}(\underbrace{\bar{X} + t_{\alpha_a, n-1} s_{\bar{X}}}_{\ell} < \mu < \underbrace{\bar{X} + t_{1-\alpha_b, n-1} s_{\bar{X}}}_{u}) = 1 - \alpha$$

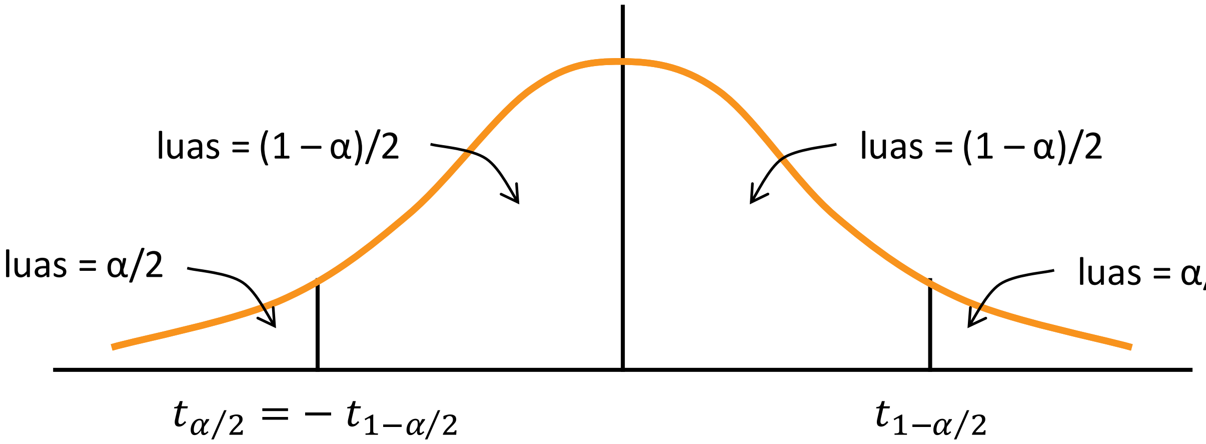
Jadi, rentang keyakinan (*confidence limits*):

$$\ell = \bar{X} + t_{\alpha_a, n-1} s_{\bar{X}} = \bar{X} + t_{\alpha_a, n-1} \frac{s_X}{\sqrt{n}}$$

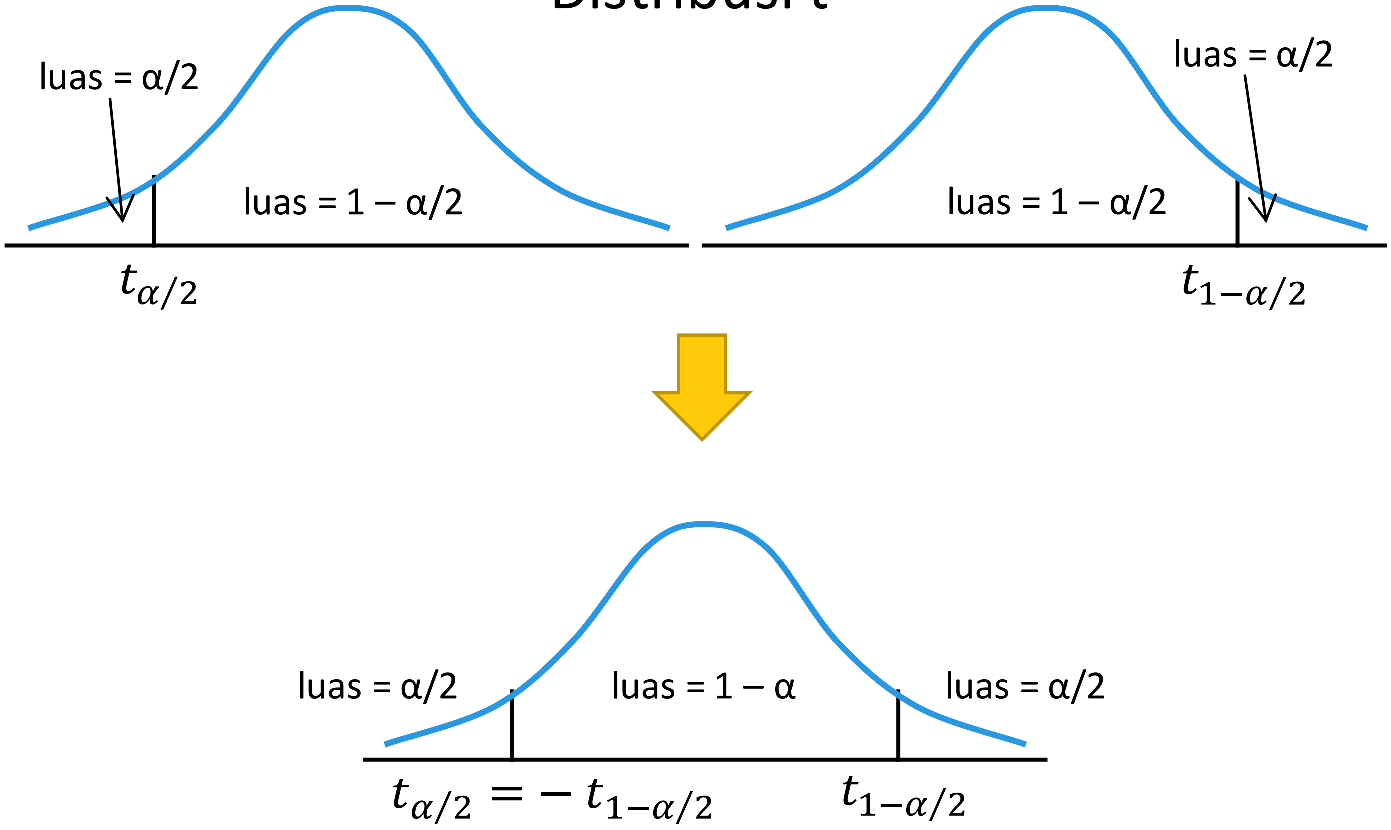
$$u = \bar{X} + t_{1-\alpha_b, n-1} s_{\bar{X}} = \bar{X} + t_{1-\alpha_b, n-1} \frac{s_X}{\sqrt{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l} t_{\alpha_a, n-1} \\ t_{1-\alpha_b, n-1} \end{array}\right\} \text{Tabel distribusi } t$$

- Jika dikehendaki probabilitas rentang keyakinan simetris, maka v_1 dan v_2 dipilih sedemikian hingga prob($t < v_1$) = prob($t > v_2$).
- Karena simetris, maka $\alpha_a = \alpha_b = \alpha/2$
- Yang dicari adalah rentang keyakinan $(1 - \alpha) = 100(1 - \alpha)\%$ maka: prob($t < v_1$) = $\alpha/2$ = prob($t > v_2$)



Distribusi t



- Dengan demikian, batas rentang keyakinan jika probabilitas rentang keyakinan simetris adalah:

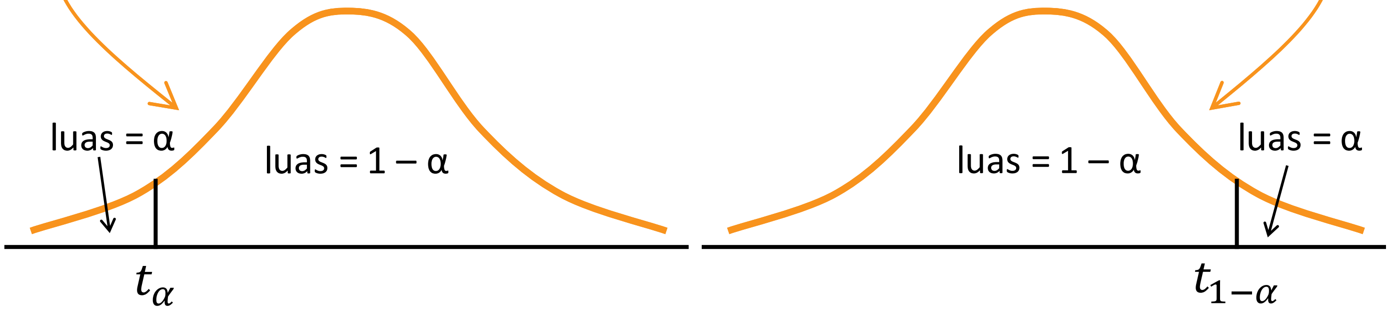
$$\ell = \bar{X} - t_{1-\alpha/2,n-1} \frac{s_X}{\sqrt{n}}$$

$$u = \bar{X} + t_{1-\alpha/2,n-1} \frac{s_X}{\sqrt{n}}$$

- Kadang dikehendaki probabilitas rentang keyakinan satu sisi
  - batas bawah → prob($t < v_1$) = α
  - batas atas → prob($t > v_2$) = α

$$\text{prob}(V > v_1) = 1 - \alpha \Longrightarrow \text{prob}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} > v_1\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}(V < v_2) = 1 - \alpha \Longrightarrow \text{prob}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$



Distribusi t

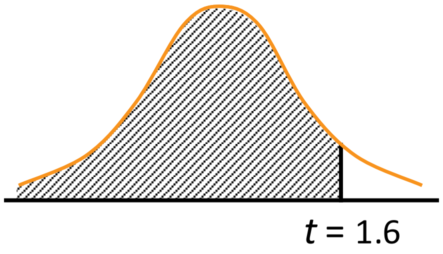
- Notasi
  - $t_{\gamma,n}$ = nilai t sedemikian hingga probabilitas variabel random t dengan n *degrees of freedom* adalah lebih kecil daripada γ.
  - misalkan:
    $t_{0.95,50}$ = nilai t sedemikian hingga prob($t < t_{0.95,50}$) = 0.95 untuk t yang memiliki 50 *degrees of freedom*.

Distribusi *t*

- Dapat dibaca di tabel distribusi *t*
  - Tabel Distribusi *t*
- Dapat dihitung dengan perintah/fungsi MSExcel
  - T.DIST(t,ν,true)
    - menghitung nilai prob($T < t$)
    - untuk menghitung nilai prob($T > t$) → 1 – T.DIST(t,ν,true)
    - t = nilai yang diinginkan untuk dicari distribusinya
    - ν = *degree of freedom*
    - *one-tailed distribution*
  - T.INV(p,ν)
    - mencari nilai t jika nilai p = prob($T < t$) diketahui
    - *one-tailed distribution*

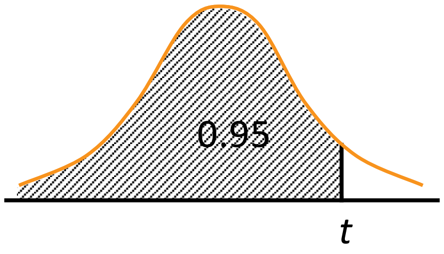
Distribusi t

untuk 50 degrees of freedom



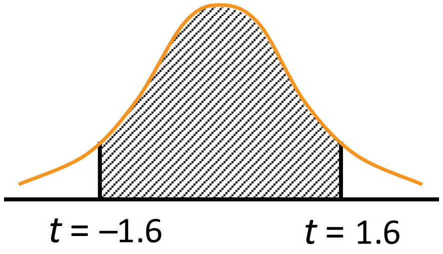
prob(T < 1.6) = T.DIST(1.6,50,TRUE) = 0.942

prob(T < 1.6) = 1 – T.DIST.RT(1.6,50) = 0.942

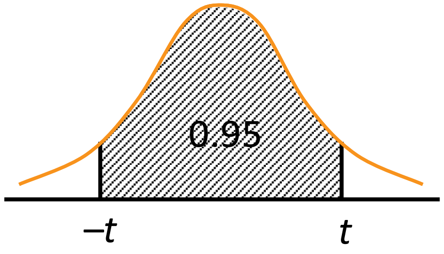


prob(T < t) = 0.95

t = T.INV(0.95,50) = 1.68



prob(–1.6 < T < 1.6) = 1 – T.DIST.2T(1.6,50) = 0.884



prob(-t < T < t) = 0.95

t = T.INV.2T(1-0.95,50) = 2

Rentang Keyakinan: μ suatu distribusi normal

- Apabila varian populasi diketahui, maka variabel random *V* didefinisikan sbb.:

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}, \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

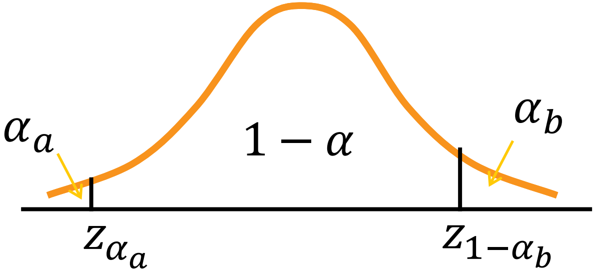
→ *V* berdistribusi normal

Rentang Keyakinan: μ suatu distribusi normal, σ diketahui

- Rentang keyakinan

$$\ell = \bar{X} + z_{\alpha_a} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

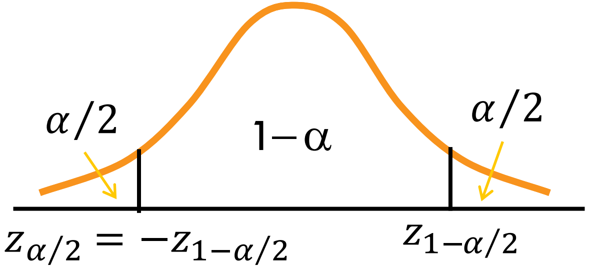
$$u = \bar{X} + z_{1-\alpha_b} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$



- Jika probabilitas rentang keyakinan diinginkan simetris

$$\ell = \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

$$u = \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$



Rentang Keyakinan: σ^2 suatu distribusi normal

- Mencari rentang [L,U] yang mengandung σ^2 dengan peluang prob($L < \sigma^2 < U$) = 1 – α.
- Didefinisikan variabel random V:

$$V = \frac{(n-1){s_X}^2}{{\sigma_X}^2}$$

→ V berdistribusi chi-kuadrat dengan (n – 1) *degrees of freedom*.

$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{(n-1){s_X}^2}{{\sigma_X}^2} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

Pilih: $v_1 = \chi^2_{\alpha/2,n-1}$

$v_2 = 1 - \chi^2_{\alpha/2,n-1}$

sehingga: $$\text{prob}\left(\chi^2_{\alpha/2,n-1} < \frac{(n-1){s_X}^2}{{\sigma_X}^2} < 1 - \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) = 1 - \alpha$$

atau: $$\text{prob}\left(\frac{(n-1){s_X}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} < {\sigma_X}^2 < \frac{(n-1){s_X}^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\right) = 1 - \alpha$$

- Jadi batas bawah dan batas atas rentang yang mengandung σ_X^2 dengan tingkat keyakinan $(1 - \alpha)$ adalah:

  - batas bawah: $$\ell = \frac{(n-1){s_X}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$
  - batas atas: $$u = \frac{(n-1){s_X}^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}$$

Catatan: X berdistribusi normal

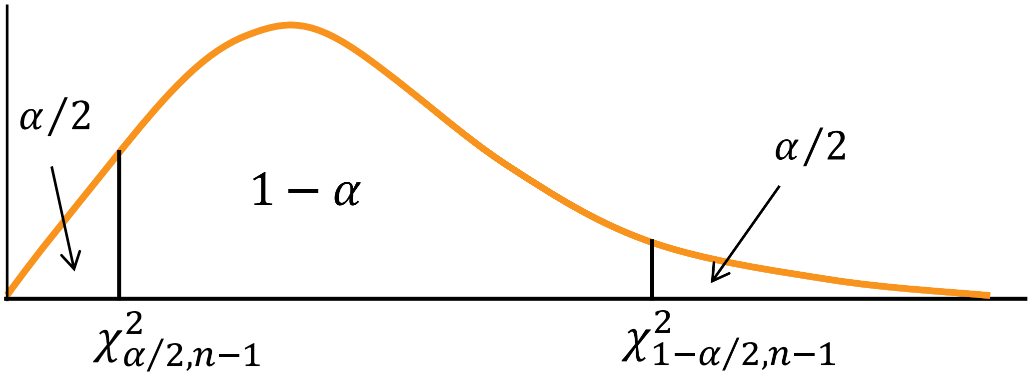
χ^2 berdistribusi chi-kuadrat

- Distribusi chi-kuadrat tidak simetris:

$$s_X{}^2 - \ell \neq u - s_X{}^2$$

n » → $(n - 1)$ » → distribusi mendekati distribusi simetris,

$s_X{}^2$ berada kira-kira di tengah-tengah rentang $[L,U]$.



Rentang Keyakinan Satu Sisi

- Hanya diinginkan satu sisi rentang keyakinan saja
  - hanya batas bawah rentang keyakinan μ

$$\mathrm{prob}(L < \theta) = 1 - \alpha \quad \Longrightarrow \quad \ell = \bar{X} - t_{1-\alpha,n-1}$$

  - hanya batas atas saja rentang keyakinan μ

$$\mathrm{prob}(\theta < U) = 1 - \alpha \quad \Longrightarrow \quad u = \bar{X} + t_{1-\alpha,n-1}$$

Terima Kasih